

317.471

28/2011

# Alkalmazott matematikai lapok

2011

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK  
OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

28.

KÖTET

# ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

ALAPÍTOTTÁK

KALMÁR LÁSZLÓ, TANDORI KÁROLY, PRÉKOPA ANDRÁS, ARATÓ MÁTYÁS

FŐSZERKESZTŐ

PÁLES ZSOLT

FŐSZERKESZTŐ-HELYETTESEK

BENCZÜR ANDRÁS, SZÁNTAI TAMÁS

FELELŐS SZERKESZTŐ

VIZVÁRI BÉLA

TECHNIKAI SZERKESZTŐ

KOVÁCS GERGELY

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI

Arató Mátyás, Csirik János, Csiszár Imre, Demetrovics János, Ésik Zoltán, Frank András, Fritz József, Galántai Aurél, Garay Barna, Gécseg Ferenc, Gerencsér László, Györfi László, Győri István, Hatvani László, Heppes Aladár, Iványi Antal, Járai Antal, Kátai Imre, Katona Gyula, Komáromi Éva, Komlósi Sándor, Kovács Margit, Krisztin Tibor, Lovász László, Maros István, Michaletzky György, Pap Gyula, Prékopa András, Recski András, Rónyai Lajos, Schipp Ferenc, Stoyan Gisbert, Szeidl László, Tusnády Gábor, Varga László

KÜLSŐ TAGOK:

Csendes Tibor, Fazekas Gábor, Fazekas István, Forgó Ferenc, Friedler Ferenc, Fülöp Zoltán, Kormos János, Maksa Gyula, Racskó Péter, Tallos Péter, Temesi József

28. kötet

Szerkesztőség és kiadóhivatal: 1027 Budapest, Fő u. 68.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását. A szerkesztőbizottság bizonyos időnként lehetővé kívánja tenni, hogy a legjobb cikkek nemzetközi folyóiratok különszámaként angol nyelven is megjelenhessenek.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztőbizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Páles Zsolt, főszerkesztő

1027 Budapest, Fő u. 68.

A folyóirat e-mail címe: [aml@math.elte.hu](mailto:aml@math.elte.hu)

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára évfolyamonként 1200 forint. Megrendelések a szerkesztőség címén lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

## POINCARÉ-EGYENLŐTLENSÉG KIZÁRÁSOS FOLYAMATOKRA

MÁNFAY MÁTÉ

Markov-folyamatok vizsgálatakor kulcsfontosságú szerepet tölt be az úgynevezett Poincaré-egyenlőtlenség, segítségével részecskerendszerek hidrodinamikai viselkedésével kapcsolatban vonhatunk le fontos következtetéseket. Korábban T. Funaki, K. Uchiyama és H.T. Yau bizonyította az egyenlőtlenséget a kétállapotú egyszerű kizárásos folyamatra, ebben az esetben az egyenlőtlenségben szereplő konstans a rendszer méretének négyzetével arányos. Cikkünk a háromállapotú kizárásos modellel foglalkozik, ahol interakció is megengedett az állapotok közt. Fő eredményünk a Poincaré-egyenlőtlenség bizonyítása erre a folyamatra, melyben a konstans nagyságrendje megegyezik a kétállapotú modellnél látottal.

## 1. Bevezetés

A róla elnevezett egyenlőtlenséget Henri Poincaré francia matematikus a Laplace-egyenlet Dirichlet-feladatához kapcsolódóan igazolta: felső becslést adott a Laplace-operátor legnagyobb sajátértékére, ami persze negatív. Klasszikus alkalmazási területe az elliptikus és parabolikus egyenletek elmélete, de az utóbbi évtizedekben tágabb értelmezést nyert, diszkrét jellegű problémák tárgyalásakor is fontos szerepet játszik, többek közt a valószínűségi számítás modern elméletében, Markov-folyamatok ergodikus viselkedésének vizsgálatánál [6]. Véges  $\Omega$  állapottérben haladó folytonos idejű Markov folyamatokat vizsgálunk, általában  $\Omega \subset \mathbb{X}^n$ , ahol  $\mathbb{X}$  véges halmaz. A folyamat generátora

$$L\varphi(\omega) = \sum_{\sigma \in \Omega} r(\omega, \sigma)(\varphi(\sigma) - \varphi(\omega)),$$

ahol  $r(\omega, \sigma)$  jelöli a nemnegatív ugrási rátát  $\omega$ -ból  $\sigma$ -ba.  $\lambda$  mérték stacionárius, ha minden  $\varphi$  függvényre  $\sum_{\omega \in \Omega} L\varphi(\omega)\lambda(\omega) = 0$ . Kölcsönható részecskerendszerek vizsgálatakor a kérdéses folyamat generátorának megszokott felírási módja a következő:

$$L\varphi(\omega) = \sum_{A \in \mathcal{A}} C_A(\omega) (\varphi(\omega^A) - \varphi(\omega)),$$

ahol  $\mathcal{A}$  olyan  $A : \Omega \rightarrow \Omega$  transzformációk gyűjteménye, melyek  $\omega$  néhány koordinátáját változtatják.  $C_A(\omega) \geq 0$  egy  $A$ -tól, illetve  $\omega$ -tól függő konstans, és

$\omega^A$  jelöli azt a konfigurációt, melyet  $\omega$ -ból kapunk az  $A$ -val jelölt transzformáción keresztül. Tipikusan  $(\omega^A)^A = \omega$ , illetve esetünkben  $\lambda(\omega) = \lambda(\omega^A)$  is teljesülni fog. Jelölje  $\mathbb{E}_\lambda$  a  $\lambda$  szerinti várható érték operátorát:  $\mathbb{E}_\lambda \varphi = \sum_{\omega \in \Omega} \varphi(\omega) \lambda(\omega)$ ,  $Var_\lambda$  a  $\lambda$  szerint számolt szórásnégyzet értéke. Poincaré egyenlőtlensége szerint van olyan  $c > 0$  szám, hogy ha  $\varphi \in L^2(\lambda)$  és  $\mathbb{E}_\lambda \varphi = 0$ , akkor

$$\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) \varphi^2(\omega) \leq -c \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) \varphi(\omega) L\varphi(\omega). \quad (1)$$

Az egyenlőtlenség jobb oldalán a

$$\mathcal{D}(\varphi) = - \sum_{\omega} \lambda(\omega) \varphi(\omega) L\varphi(\omega)$$

Dirichlet-forma áll, vagyis  $\mathbb{E}_\lambda \varphi^2 \leq c \mathcal{D}(\varphi)$ , tehát  $Var_\lambda \varphi \leq c \mathcal{D}(\varphi)$  ha  $\mathbb{E}_\lambda \varphi \neq 0$ .

A kölcsönható folyamatok elméletében gyakran feltételezett  $\lambda(\omega) = \lambda(\omega^A)$  azonosság miatt  $\lambda$  eleve stacionárius mérték, vagyis  $\mathbb{E}_\lambda L\varphi^2 = 0$ , tehát

$$\mathcal{D}(\varphi) = \sum_{\omega \in \Omega, A \in \mathcal{A}} C_A(\omega) (\varphi(\omega^A) - \varphi(\omega))^2 \lambda(\omega).$$

Valóban,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\varphi) &= \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} (L\varphi^2 - 2\varphi L\varphi) \lambda(\omega) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega, A \in \mathcal{A}} C_A(\omega) (\varphi^2(\omega^A) - \varphi^2(\omega) - 2\varphi(\omega) (\varphi(\omega^A) - \varphi(\omega))) = \\ &= \sum_{\omega \in \Omega, A \in \mathcal{A}} C_A(\omega) (\varphi(\omega^A) - \varphi(\omega))^2 \lambda(\omega). \end{aligned}$$

Poincaré egyenlőtlensége tulajdonképpen az  $L$  generátor szimmetrikus részéről szól, ami  $S := (L + L^*)/2$ , ahol  $L^*$  jelöli az  $L$  adjungáltját az  $L^2(\lambda)$  téren:

$$L^* \varphi(\omega) = \sum_{A \in \mathcal{A}} C_A(\omega^A) (\varphi(\omega^A) - \varphi(\omega)),$$

hacsak  $\lambda(\omega^A) = \lambda(\omega)$ . Az  $S < 0$  operátor legnagyobb negatív sajátértékére adott becslés a stacionárius eloszláshoz való konvergencia sebességéről is információt szolgáltat. A vizsgált problémák többségénél  $n = +\infty$ , de persze elsőként a tér véges részét vizsgálják, majd ezt terjesztik ki a végtelen rendszerre.

## 2. A Poincaré-egyenlőtlenség egyszerű alkalmazásai

Először azt mutatjuk meg, hogy valószínűségi mértékek

$$|\mu - \lambda| := \sum_{\omega \in \Omega} |\mu(\omega) - \lambda(\omega)|$$



variációs távolsága becsülhető a Dirichlet-forma segítségével.

2.1. ÁLLÍTÁS. Ha egy véges  $\Omega$  állapotterű,  $\lambda$  stacionárius eloszlású sztochasztikus folyamatra teljesül a Poincaré-egyenlőtlenség  $c$  konstanssal, akkor

$$|\mu - \lambda|^2 \leq 4c \mathcal{D}(\sqrt{f}),$$

ahol  $\mu$  valószínűségi mérték, és  $f(\omega) := \mu(\omega)/\lambda(\omega)$ .

Bizonyítás. A  $\sum_{\omega \in \Omega} |f(\omega) - 1| \lambda(\omega)$  tagot alakítva:

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} |f(\omega) - 1| \lambda(\omega) &= \sum_{\omega \in \Omega} |\sqrt{f(\omega)} - 1| |\sqrt{f(\omega)} + 1| \lambda(\omega) \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{\omega \in \Omega} (\sqrt{f(\omega)} - 1)^2 \lambda(\omega)} \sqrt{\sum_{\omega \in \Omega} (\sqrt{f(\omega)} + 1)^2 \lambda(\omega)}. \end{aligned}$$

Mivel

$$\sum_{\omega \in \Omega} (\sqrt{f(\omega)} - 1)^2 \lambda(\omega) = 2 - 2 \sum_{\omega \in \Omega} \sqrt{f(\omega)} \lambda(\omega),$$

illetve

$$\sum_{\omega \in \Omega} (\sqrt{f(\omega)} + 1)^2 \lambda(\omega) = 2 + 2 \sum_{\omega \in \Omega} \sqrt{f(\omega)} \lambda(\omega),$$

tehát

$$\begin{aligned} &\sqrt{2 - 2 \sum_{\omega \in \Omega} \sqrt{f(\omega)} \lambda(\omega)} \sqrt{2 + 2 \sum_{\omega \in \Omega} \sqrt{f(\omega)} \lambda(\omega)} = \\ &= 2 \sqrt{1 - \left( \sum_{\omega \in \Omega} \sqrt{f(\omega)} \lambda(\omega) \right)^2} = 2 \left( \text{Var}_\lambda \sqrt{f} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

amiből Poincaré-egyenlőtlenségével adódik az állítás.  $\square$

Az aktuális  $\mu$  és a stacionárius  $\lambda$  mérték eltérése az

$$S(\mu|\lambda) = \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) \log \frac{\mu(\omega)}{\lambda(\omega)}$$

relatív entrópia csökkenésének sebessége ad becslést.

2.2. ÁLLÍTÁS. Egy véges  $\Omega$  állapotterű,  $\lambda$  stacionárius mértékű,  $\mu_0$  eloszlásból indított Markov-folyamat  $t$  idő utáni eloszlása  $\mu_t$ , ekkor

$$S(\mu_t|\lambda) + \int_0^t \mathcal{D}(\sqrt{f_u}) du \leq S(\mu_0|\lambda),$$

ahol  $f_t(\omega) = \mu_t(\omega)/\lambda(\omega)$ .

*Bizonyítás.* A Kolmogorov-egyenlet alapján:

$$\partial_t S(\mu_t|\lambda) = \partial_t \sum_{\omega \in \Omega} \mu_t(\omega) \log f_t(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mu_t(\omega) (\partial_t + L) \log f_t(\omega),$$

ahol  $\partial_t f_t/f_t$  járuléka eltűnik, mert  $\lambda$  stacionárius, tehát

$$\partial_t S(\mu_t|\lambda) = \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{\sigma \in \Omega} \lambda(\omega) r(\omega, \sigma) f_t(\omega) \log \frac{f_t(\sigma)}{f_t(\omega)}.$$

Mivel

$$\begin{aligned} f_t(\omega) \log \frac{f_t(\sigma)}{f_t(\omega)} &= 2f_t(\omega) \log \sqrt{\frac{f_t(\sigma)}{f_t(\omega)}} \leq 2 \left( \sqrt{f_t(\omega)f_t(\sigma)} - f_t(\omega) \right) \\ &= f_t(\sigma) - f_t(\omega) - \left( \sqrt{f_t(\sigma)} - \sqrt{f_t(\omega)} \right)^2, \end{aligned}$$

adódik, hogy

$$\partial_t S(\mu_t|\lambda) \leq - \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{\sigma \in \Omega} \lambda(\omega) r(\omega, \sigma) \left( \sqrt{f_t(\omega)} - \sqrt{f_t(\sigma)} \right)^2 = -\mathcal{D} \left( \sqrt{f_t} \right)$$

□

A két eredményből következik, hogy ha teljesül a Poincaré-egyenlőtlenség egy adott folyamatra, akkor annak stacionárius mértéke egyértelmű. Ha ugyanis  $\lambda$  mellett  $\mu$  is stacionárius mérték volna, akkor  $\mu_t = \mu$ , vagyis  $\partial_t S(\mu_t|\lambda) = 0$ , tehát  $|\mu - \lambda| = 0$ .

### 3. Poincaré-egyenlőtlenség szimmetrikus kizárásos folyamatokra

#### 3.1. A kétállapotú modell

A legegyszerűbb vizsgált folyamat az egyszerű szimmetrikus kizárásos folyamat, ennek konfigurációi  $n$  periódusú 0–1 sorozatok:  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  és  $\omega_{k+n} = \omega_k$ . Ha  $\omega_k = 1$ , akkor azt mondjuk, hogy a  $k$  helyen részecske van,  $\omega_k = 0$  üres pozíciót jelez. A konfigurációs tér az  $\Omega_p^n = \{\omega \mid \sum \omega_k = p\}$  halmaz,  $\mathbb{A}$  az  $\{1, \dots, n\}$  halmaz kételemű részhalmazaiából áll, és

$$C_A(\omega) = C_b(\omega) = \frac{1}{2} (\omega_k + \omega_l - 2\omega_k\omega_l),$$

ha  $b = (k, l)$ , továbbá  $\omega^b$  azt a konfigurációt jelöli, amit  $\omega$ -ból kapunk, ha  $b = (k, l)$  élen lévő  $\omega_k$  és  $\omega_l$  koordinátákat felcseréljük, vagyis  $(\omega^{(k,l)})_k = \omega_l$  és  $(\omega^{(k,l)})_l = \omega_k$ .

Könnyen látható, hogy a folyamat stacionárius mértéke:  $\lambda(\omega) = \frac{p!(n-p)!}{n!}$ . T. Funaki, K. Uchiyama és H.T. Yau [1] erre a folyamatra bizonyította a Poincaré-egyenlőtlenséget. Cikkük egyik eredménye a szimmetrizált, illetve távoli ugrásokat megengedő folyamatra vonatkozik:

3.1. TÉTEL. [1] Minden  $\varphi : \Omega_p^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény esetén, melyre  $\mathbb{E}_\lambda \varphi = 0$ , teljesül a Poincaré-egyenlőtlenség:

$$\sum_{\omega \in \Omega_p^n} \lambda(\omega) \varphi^2(\omega) \leq \frac{1}{4n} \sum_{\omega \in \Omega_p^n, b \in B} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2 \lambda(\omega),$$

ahol  $B = \{(k, l) | 1 \leq k, l \leq n\}$  a cserék halmaza.

A későbbiekben utalni fogunk arra, hogy az általunk vizsgált probléma megoldásakor mennyire voltak alkalmazhatóak a Funaki-féle cikkben látott módszerek.

### 3.2. A háromállapotú modell

A következőkben vizsgált modell fizikai indíttatású. A modellt Tóth Bálint és Valkó Benedek vezette be [5], majd Fritz József és Tóth Bálint, illetve Fritz József és Nagy Katalin vizsgálja 2004-ben, valamint 2006-ban megjelent cikkükben [4], [2]. A konfigurációk 3 fajta elemet, részecskét tartalmaznak:  $-1, 0, 1$ , és mindegyikből adott, a folyamat során állandó számú szerepel, így a konfigurációs tér:

$$\Omega_{p,m}^n = \{\omega \mid \sum \omega_k = p - m, \sum \omega_k^2 = p + m\}.$$

Gondolhatunk itt pozitív, negatív részecskékre és üres helyekre. A részecskéink továbbra is egy dimenzióban mozognak, egy periodikus szakaszon, így a konfigurációkat egy  $n$ -hosszú vektorral reprezentáljuk:  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  és  $\omega_{k+n} = \omega_k$ . Továbbá egy erőter hatására a pozitív töltésű részecskék jobbra, a negatív töltésűek balra mozognak 1-1 rátával, és egy  $-1$ -es és  $+1$ -es részecske helycseréje 2-es rátával történik. Ez bonyolultabb T. Funaki, K. Uchiyama és H.T. Yau által vizsgált kétállapotú modellnél, viszont a cikkükben [1] látott módszerek közül néhányat mi is alkalmazni fogunk.

A stacionárius  $\lambda$  valószínűségi mérték most is az egyenletes eloszlás az  $\Omega_{p,m}^n$  altéren:  $\lambda(\omega) = \frac{p!m!z!}{n!}$ , ahol  $z = n - m - p$  jelöli a nullák számát. Vagyis  $\lambda$  egy megmaradási feltételekkel vett egyenletes eloszlás a konfigurációs téren. Legyen  $\varphi$  a konfigurációs tér elemein ható függvény:  $\varphi : \Omega_{p,m}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , feltehető, hogy  $\mathbb{E}_\lambda \varphi = 0$ .

A folyamat generátora a következőképpen hat:

$$L\varphi(\omega) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} (\omega_k^2 + \omega_{k+1}^2 + \omega_k - \omega_{k+1}) \left( \varphi(\omega^{(k,k+1)}) - \varphi(\omega) \right).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy  $\lambda$  stacionárius mérték.

Térjünk át a Poincaré-egyenlőtlenség vizsgálatára. Az  $(L + L^*)/2$  generátorral rendelkező folyamatot vizsgáljuk,  $-\langle \varphi, L\varphi \rangle = -\langle \varphi, L^*\varphi \rangle$  és így

$$-\langle \varphi, L\varphi \rangle = -\frac{1}{2} \langle \varphi, (L + L^*)\varphi \rangle.$$

Vagyis ezáltal a Dirichlet-forma értéke nem változik, viszont egy reverzibilis folyamatot vizsgálhatunk, ami kényelmesebbé teszi a tárgyalást.  $L^*$  képlete alapján:

$$\begin{aligned} \left( \frac{L + L^*}{2} \right) \varphi(\omega) &= \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n ((\omega_k^2 + \omega_{k+1}^2 + \omega_k - \omega_{k+1}) + \\ &\quad + (\omega_{k+1}^2 + \omega_k^2 + \omega_{k+1} - \omega_k)) \left( \varphi(\omega^{(k,k+1)}) - \varphi(\omega) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (\omega_k^2 + \omega_{k+1}^2) \left( \varphi(\omega^{(k,k+1)}) - \varphi(\omega) \right). \end{aligned}$$

Tehát

$$\mathcal{D}(\varphi) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{2} (\omega_k^2 + \omega_{k+1}^2) \left( \varphi(\omega^{(k,k+1)}) - \varphi(\omega) \right)^2.$$

A következő tétel a cikk fő eredménye. Itt jegyezzük meg, hogy a következőkben még távoli cseréket is megengedünk (gondolhatunk erre úgy is, hogy a folyamat egy  $n$  pontú teljes gráfon zajlik), majd ezt az eredményt felhasználva vizsgáljuk a valódi folyamatot. Ezt az utat követték a Funaki-féle cikkben is.

**3.2. TÉTEL.** Minden  $\varphi : \Omega_{p,m}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény esetén, melyre  $\mathbb{E}_\lambda \varphi = 0$ , teljesül a Poincaré-egyenlőtlenség:

$$\sum_{\omega \in \Omega_{p,m}^n} \lambda(\omega) \varphi^2(\omega) \leq \frac{2}{n} \sum_{\omega \in \Omega_{p,m}^n, b \in B} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2 \lambda(\omega),$$

ahol  $B = \{(k, l) | 1 \leq k, l \leq n\}$  a cserék halmaza.

#### 4. A Poincaré-egyenlőtlenség bizonyítása a háromállapotú kizárásos folyamatra

Ebben a fejezetben a 3.2. tételt bizonyítjuk.

##### 4.1. A Poincaré-egyenlőtlenség bal oldalának átalakítása

A [1] cikk mintájára, mivel  $\mathbb{E}_\lambda \varphi = 0$ :

$$\sum_{\omega \in \Omega_{p,m}^n} \lambda(\omega) \varphi^2(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Omega_{p,m}^n} \sum_{\beta \in \Omega_{p,m}^n} \lambda(\alpha) \lambda(\beta) (\varphi(\alpha) - \varphi(\beta))^2,$$

továbbá az

$$\alpha = \omega^0 \rightarrow \omega^1 \rightarrow \dots \rightarrow \omega^k = \beta$$

úton haladva  $\alpha$ -ból  $\beta$  konfigurációba a következő átalakítást hajthatjuk végre:

$$\begin{aligned} (\varphi(\alpha) - \varphi(\beta))^2 &= \sum_{l=0}^{k-1} (\varphi(\omega^{l+1}) - \varphi(\omega^l))^2 = \left( \sum_{l=0}^{k-1} (\varphi(\omega^{l+1}) - \varphi(\omega^l)) \right)^2 + \\ &+ 2 \sum_{r=0}^{k-1} (\varphi(\omega^r) - \varphi(\omega^{r+1})) (\varphi(\omega^{r+1}) - \varphi(\beta)) := N_{\alpha, \beta} + K_{\alpha, \beta}. \end{aligned}$$

E szerint a felbontás szerint fogjuk becsülni a tagokat, a kétszeres szorzókról belátjuk, hogy az összes konfigurációra összegezve negatívot adnak, míg a négyzetes tagok alkotta összeget pedig felülről fogjuk becsülni.

A három állapotot a könnyebb kezelhetőség kedvéért értelemszerűen a  $+$ ,  $0$ ,  $-$  szimbólumokkal jelöljük.

A bizonyítás szerkezete hasonlít a  $0,1$  részecskékből álló konfigurációs térnél látottra [1]. Viszont vegyük észre, hogy most az, hogy két konfiguráció hány helyen különbözik, nem határozza meg a két konfiguráció közt vezető út hosszát:

$$\begin{aligned} \alpha &= (-, -, 0, 0, +, +), \\ \beta &= (+, +, -, -, 0, 0), \\ \gamma &= (+, 0, +, -, 0, -). \end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy mind  $\beta$ , mind  $\gamma$  is 6 helyen különbözik  $\alpha$ -tól, viszont  $\alpha \rightarrow \beta$  út 4 hosszú és  $\alpha \rightarrow \gamma$  út 3 hosszú, így a tagok összeszámolása nem ígérkezik egyszerűnek. Az olyan 3 elemű részkonfigurációkat, melyek rendezéséhez legalább 2 csere szükséges, *ciklusnak* fogjuk nevezni.

Vegyük észre, hogy a permutációktól eltekintve két fajta ciklus van:

$$|+, 0, -| \rightarrow |0, -, +|,$$

illetve

$$|+, 0, -| \rightarrow |-, +, 0|.$$

Az első ciklust *negatív ciklusnak*, a másodikat *pozitív ciklusnak* nevezzük a továbbiakban. Az elnevezés abból ered, hogy a  $0$  elem helyére  $-$ , vagy  $+$  állapotnak kell kerülnie.

#### 4.2. Az utak szerkezete:

Először vizsgáljuk meg adott  $\alpha$  és  $\beta$  konfiguráció pár közti különbségek szerkezetét, azt, hogy milyen cserékkel lehet egyikből a másikba eljutni:

$$N_{x,y} := \{k \mid \alpha_k = x, \beta_k = y\},$$

és legyenek ezek elemszámai:

$$n_{x,y} := |N_{x,y}|.$$



Most vezessünk be néhány transzformációt, melyek a konfigurációkon hatnak.  $T_{(k,l)}^b$  legyen az a transzformáció, ami  $\omega$  konfiguráció  $k$ . és  $l$ . koordinátáján lévő állapotot felcseréli. Vagyis  $(T_{(k,l)}^b(\omega))_k = \omega_l$  és  $(T_{(k,l)}^b(\omega))_l = \omega_k$  és a többi koordináta nem változik.

$T_{(k,l,m)}^{c+}$  már három elemet változtat, és akkor értelmes, ha  $k, l, m$  állapotok közül egy-egy  $+, 0, -$  állapot, és a transzformáció a  $0$  állapotból  $+$ , a  $+$  állapotból  $-$  és a  $-$  állapotból  $0$ -át csinál az adott  $k, l, m$  koordináta hármason, a többi koordinátát nem változtatja. Például:  $T_{(2,3,5)}^{c+}(0+--0+) = 0-0-++$ .

$T_{(k,l,m)}^{c-}$  is olyan konfigurációkon értelmezett, ahol  $k, l, m$  állapotok közül egy-egy  $+, 0, -$  állapot, és a transzformáció a  $0$  állapotból  $-$ , a  $-$  állapotból  $+$  és a  $+$  állapotból  $0$ -át csinál az adott  $k, l, m$  koordináta hármason, a többi koordinátát nem változtatja. Például  $T_{(2,3,5)}^{c-}(0+--0+) = 00+--+$ .

Vegyük észre, hogy  $T^{c+}$  és  $T^{c-}$  transzformációk a ciklusokat hivatottak rendezni, és mindkettő felírható két megfelelő  $T^b$  transzformáció szorzataként. A következőkben utakat fogunk a konfiguráció párok közt definiálni. Adott  $\alpha$  és  $\beta$  konfiguráció pár esetén  $\alpha$  konfiguráción hajtsuk végre  $T^b, T^{c+}, T^{c-}$  transzformációk egy sorozatát, hogy  $\beta$  konfigurációt kapjuk. Méghozzá tegyük ezt úgy, hogy minden egyes koordinátán legfeljebb egyszer hajtunk végre transzformációt. Egy út legyen azon konfigurációk egymásutánja, amiket egy ilyen transzformáció sorozat során kapunk.  $S_{\alpha,\beta}$  legyen adott  $\alpha, \beta$  párra az így megengedett utak halmaza. A könnyebb érthetőség kedvéért hozunk egy példát a transzformációk sorozatára:

$$\begin{aligned} \left( T_{(1,2)}^b \circ T_{(3,4,6)}^{c+} \circ T_{(5,7,10)}^{c-} \circ T_{(8,11)}^b \right) (+0+00-+0+--)= \\ = (0+--+00-++0), \end{aligned}$$

és az ehhez tartozó út:

$$\begin{aligned} \alpha = (+0+00-+0+--)&\rightarrow (+0+00-+-+0-)&\rightarrow \\ &\rightarrow (+0+0-0-++0)&\rightarrow (+0-+-00-++0)&\rightarrow \\ &&&\rightarrow (0+--+00-++0) = \beta. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy mivel a transzformációk egymástól diszjunkt koordinátákat változtatnak meg, a transzformációk felcserélhetőek.

### 4.3. A kétszeres szorzatok

Kezdjük a kétszeres szorzatok negatívításával. Adott  $\alpha, \beta$  konfiguráció pár közt készítsük el az összes  $S_{\alpha,\beta}$ -beli utat, ekkor a

$$\sum_{(\alpha,\beta)} \sum_{s \in S_{\alpha,\beta}} \frac{1}{|S_{\alpha,\beta}|} \sum_{r=0}^{|s|-1} (\varphi(\omega^r) - \varphi(\omega^{r+1})) (\varphi(\omega^{r+1}) - \varphi(\beta)) \quad (2)$$

összeg negatívítását fogjuk igazolni, ahol  $|s|$  az  $s$  út hosszát jelöli.

Fixáljunk egy

$$(\varphi(\omega^r) - \varphi(\omega^{r+1}))(\varphi(\omega^{r+1}) - \varphi(\beta)) \quad (3)$$

tagot, és az  $\omega^{r+1} = T\omega^r$ -et adó  $T$  transzformációt és  $\omega^r$ -t is és magát  $r$ -t is, vagyis azt, hogy hányadik helyen hajtjuk végre a  $T$  transzformációt. Az áttekinthetőség kedvéért  $\omega^r \equiv \omega$  jelölést használjuk. Négyesével fogjuk csoportosítani a tagokat. Ha  $T = T_{(k,l)}^b$  valamely  $k, l$  párra, akkor a Funaki-féle [1] cikkben látottak továbbra is érvényesek:

Ugyebár van egy  $s$ -sel jelölt utunk:

$$\alpha \rightarrow \dots \rightarrow \omega \rightarrow \omega^b \rightarrow \dots \rightarrow \beta.$$

Az  $\alpha \rightarrow \beta$  út, ezt három részre bontjuk:  $s_1$  legyen  $\alpha \rightarrow \omega$ , és legyen  $s_2 \omega^b \rightarrow \beta$ . Induljunk ki  $\beta$  konfigurációból, és haladjunk a  $b \circ s_1$  úton (ahol  $\circ$  az utak egymás után fűzését jelenti), így jussunk el  $\gamma$ -ba:

$$\alpha \xrightarrow{s_1} \omega \xrightarrow{b} \omega^b \xrightarrow{s_2} \beta \xrightarrow{b} \beta^b \xrightarrow{s_1} \gamma.$$

Így van egy  $\gamma \rightarrow \omega^b$  utunk:  $s_1^{-1} \circ b \circ s_2^{-1}$  és ezen út mentén találjuk

$$(\varphi(\beta^b) - \varphi(\beta))(\varphi(\beta) - \varphi(\omega^b))$$

tagot, továbbá ha az egész úton végrehajtjuk a  $b$  cserét, akkor ugyebár  $\gamma^b \rightarrow \omega$  utat kapjuk és  $(\varphi(\beta) - \varphi(\beta^b))(\varphi(\beta^b) - \varphi(\omega))$  tagot. Tehát a szummában szereplő tagok négyesével (mint  $\alpha \rightarrow \beta$ ,  $\alpha^b \rightarrow \beta^b$ ,  $\gamma^b \rightarrow \omega$ ,  $\gamma \rightarrow \omega^b$ ) csoportosíthatóak, hiszen bármelyik tagból indulva a fenti három átalakítást elvégezve a másik három tagot kapjuk. Továbbá minden négyes csoportból minden egyes tag szorzója a szummában azonos, hiszen mindegyik tagban a  $b$  csere azonos helyen történik, és ugyanazokat az elemeket cseréljük fel csak esetleg fordított sorrendben. Egy csoporton belüli tagok összege:

$$\begin{aligned} & (\varphi(\omega) - \varphi(\omega^b))(\varphi(\omega^b) - \varphi(\beta)) + (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))(\varphi(\omega) - \varphi(\beta^b)) + \\ & + (\varphi(\beta^b) - \varphi(\beta))(\varphi(\beta) - \varphi(\omega^b)) + (\varphi(\beta) - \varphi(\beta^b))(\varphi(\beta^b) - \varphi(\omega)) = \\ & = (\varphi(\omega) - \varphi(\omega^b))(\varphi(\omega^b) - \varphi(\beta) + \varphi(\beta^b) - \varphi(\omega)) + \\ & + (\varphi(\beta) - \varphi(\beta^b))(\varphi(\omega^b) - \varphi(\beta) + \varphi(\beta^b) - \varphi(\omega)) = \\ & -(\varphi(\omega^b) - \varphi(\beta) + \varphi(\beta^b) - \varphi(\omega))^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Ha  $T$  transzformáció  $T^{c+}$  vagy  $T^{c-}$  típusú, akkor egy apró változtatásra van szükség: Van egy  $s$ -sel jelölt utunk:

$$\alpha \rightarrow \dots \rightarrow \omega \rightarrow T\omega \rightarrow \dots \rightarrow \beta.$$

Ekkor létezik egy  $T_{s_1}$  transzformáció, ami a fent definiált elemi transzformációk szorzata, hogy  $T_{s_1}\alpha = \omega$  tovább egy  $T_{s_2}$  transzformáció, szintén elemi transzformációk szorzata, hogy  $(T_{s_2} \circ T)\omega = \beta$ . Persze ekkor  $(T_{s_2} \circ T \circ T_{s_1})\alpha = \beta$  is teljesül.

Így az utunkat így is felírhatjuk:

$$\alpha \xrightarrow{T_{s_1}} \omega \xrightarrow{T} T\omega \xrightarrow{T_{s_2}} \beta,$$

ahol a nyilak indexébe az kerül, hogy a konfiguráción milyen transzformációt hajtunk végre.

Most induljunk ki  $T\alpha$  konfigurációból, és haladjunk  $T_{s_2} \circ T^{-1} \circ T_{s_1}$  transzformáció sorozat által definiált úton. Ekkor a következő konfigurációkon halad keresztül az út:

$$T\alpha \xrightarrow{T_{s_1}} T\omega \xrightarrow{T} \omega \xrightarrow{T_{s_2}} T^{-1}\beta.$$

Ha  $T\alpha$  és  $T^{-1}\beta$  közt ezen a fenti úton haladunk, akkor a kétszeres szorzatoknál megjelenik a

$$(\varphi(T\omega) - \varphi(\omega)) (\varphi(\omega) - \varphi(T^{-1}\beta)) \quad (4)$$

tag.

Ezek után induljunk ki  $(T_{s_2} \circ T)\alpha$  konfigurációból, és haladjunk  $T_{s_2}^{-1} \circ T^{-1} \circ T_{s_1}$  transzformáció által definiált úton. Ebben az esetben a következő konfigurációkat érinti az út:

$$(T_{s_2} \circ T)\alpha \xrightarrow{T_{s_1}} \beta \xrightarrow{T^{-1}} T^{-1}\beta \xrightarrow{T_{s_2}^{-1}} \omega.$$

Ekkor ha  $(T_{s_2} \circ T)\alpha$  és  $\omega$  közt ezen az úton haladunk, akkor a kétszeres szorzatoknál a következő tag is szerepelni fog:

$$(\varphi(\beta) - \varphi(T^{-1}\beta)) (\varphi(T^{-1}\beta) - \varphi(\omega)). \quad (5)$$

Végül ha  $T_{s_2}\alpha$  konfigurációból indulunk ki, és  $T_{s_2}^{-1} \circ T \circ T_{s_1}$  transzformáció által definiált úton haladunk, akkor a következő konfigurációkon keresztül halad az út:

$$T_{s_2}\alpha \xrightarrow{T_{s_1}} T^{-1}\beta \xrightarrow{T} \beta \xrightarrow{T_{s_2}^{-1}} T\omega.$$

Vagyis ebben az esetben ha  $T_{s_2}\alpha$  és  $T\omega$  közt a most definiált úton haladunk, akkor a kétszeres szorzatok közt a következő tag is szerepel:

$$(\varphi(T^{-1}\beta) - \varphi(\beta)) (\varphi(\beta) - \varphi(T\omega)). \quad (6)$$

Könnyen látható, hogy akármelyik most definiált 4 út egyikéből indultunk volna ki, és elvégeztük volna a fenti 3 manipulációt, szintén ugyanezeket az utakat és tagokat kaptuk volna. Továbbá nyilván minden egyes tag szorzója azonos. Ekkor a (3), (4), (5), (6) tagok összege:

$$\begin{aligned} & (\varphi(\omega) - \varphi(T\omega)) (\varphi(T\omega) - \varphi(\beta)) + (\varphi(T\omega) - \varphi(\omega)) (\varphi(\omega) - \varphi(T^{-1}\beta)) + \\ & + (\varphi(T^{-1}\beta) - \varphi(\beta)) (\varphi(\beta) - \varphi(T\omega)) + (\varphi(\beta) - \varphi(T^{-1}\beta)) (\varphi(T^{-1}\beta) - \varphi(\omega)) = \\ & = (\varphi(\omega) - \varphi(T\omega)) (\varphi(T\omega) - \varphi(\beta) + \varphi(T^{-1}\beta) - \varphi(\omega)) + \\ & + (\varphi(\beta) - \varphi(T^{-1}\beta)) (\varphi(T\omega) - \varphi(\beta) + \varphi(T^{-1}\beta) - \varphi(\omega)) = \\ & - (\varphi(T\omega) - \varphi(\beta) + \varphi(T^{-1}\beta) - \varphi(\omega))^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Így  $\sum_{\alpha,\beta} K_{\alpha,\beta} \leq 0$ , amit igazolni akartunk, most már áttérhetünk az összeg első tagjának vizsgálatára.

Itt jegyezzük meg, hogy az [1] cikkben látott bizonyítás önmagában nem volt megismételhető, lévén, hogy vannak olyan cserék, melyek sorrendje nem felcserélhető, ezt küszöböltük ki  $T^{c+}$  és  $T^{c-}$  transzformációk bevezetésével.

#### 4.4. A négyzetes tagok

Második lépés

$$Q = \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{|S_{\alpha,\beta}|} \sum_{s \in S_{\alpha,\beta}} \left( \sum_{l=0}^{|s|-1} (\varphi(\omega^{l+1}) - \varphi(\omega^l))^2 \right) \quad (7)$$

összeg vizsgálata. Elsőként  $T^{c+}$  és  $T^{c-}$  transzformációkat felbontjuk az összes lehetséges módon két-két  $T$  transzformáció szorzatára, ezt ugyebár egy-egy transzformációnál 6 féleképpen tehetjük meg. Képletben:

$$\begin{aligned} (\varphi(T^{c+}\omega) - \varphi(\omega))^2 &= \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (\varphi((T_{i,2} \circ T_{i,1})\omega) - \varphi(T_{i,1}\omega) + T_{i,1}\varphi(T_{i,1}\omega) - \varphi(\omega))^2 \leq \\ &\frac{2}{6} \sum_{i=1}^6 (\varphi((T_{i,2} \circ T_{i,1})\omega) - \varphi(T_{i,1}\omega))^2 + (\varphi(T_{i,1}\omega) - \varphi(\omega))^2 \leq \\ &\sum_{i=1}^6 (\varphi((T_{i,2} \circ T_{i,1})\omega) - \varphi(T_{i,1}\omega))^2 + (\varphi(T_{i,1}\omega) - \varphi(\omega))^2, \end{aligned}$$

ahol  $T_{i,2}$  és  $T_{i,1}$  megfelelő cseréket jelölnek, az átalakítások során a Cauchy-egyenlőtlenséget használtuk. Ezzel a lépéssel tulajdonképpen azt értük el, hogy csak sima párcserékkel kell foglalkoznunk.

Így a (7) becslése a következő alakot ölti:

$$Q \leq \sum_{\omega,b} c(\omega, b) (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2,$$

ahol  $c(\omega, b)$  csak  $\omega$ -tól és  $b$ -től függő állandó. Vegyük észre, hogy

$$c(\omega_1, b_1) = c(\omega_2, b_2),$$

ha  $b_1$  és  $b_2$  azonos állapotokat cserélnek fel. Hiszen ha veszünk két tagot:

$$(\varphi(\omega_1^{b_1}) - \varphi(\omega_1))^2 \text{ és } (\varphi(\omega_2^{b_2}) - \varphi(\omega_2))^2.$$

Ekkor létezik olyan  $\pi$  permutáció, mely  $\omega_1$  konfigurációt  $\omega_2$ -be viszi, és  $b_1$  csere is  $b_2$  cserébe megy át. Így ez a permutáció az utak közt, melyek a két kérdéses tagot tartalmazzák, egy bijekciót ad meg, vagyis a két tag szorzója valóban azonos lesz a fenti összegben.

Felső becslést fogunk adni arra, hogy egy adott  $(\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2$  tag milyen együttthatóval szerepelhet (7)-ban, ehhez elég megbecsülni, hogy hány olyan tag van, amelyben a csere  $b$ -vel azonos állapotokat cserél. Legyen  $b$  csere olyan ami  $+$  és  $0$  állapotokat cserél (ezt innentől  $(+0)$  cserének hívjuk), más cserékre ugyanez az okoskodás elmondható.

Ehhez elsőként vizsgáljuk meg azt, hogy adott  $\alpha$  és  $\beta$  közt vezető úton legfeljebb hány  $(+0)$  csere van. Minden egyes úthoz tartozik egy koordináta partíció, aszerint, hogy melyik elemeken hajtottunk végre  $T, T^{c+}, T^{c-}$  transzformációt. Példa a partíciókra:

$$\begin{aligned}\alpha &:= |-, 0|0|+, 0|+, 0|-, 0, +|-, +|+|+|+|0, -, +|+, 0, -|, \\ \beta &:= |0, -|0|0, +|0, +|+, -, 0|+, -|+|+|+|-, +, 0|-, +, 0|.\end{aligned}$$

Ekkor akármilyen utat is tekintünk, a  $(+0)$  cserék száma nem lehet több, mint a

$$\begin{array}{ccc}|+, 0| & |-, 0, +| & |+, 0, -| \\ |0, +| & |+, -, 0| & |-, +, 0|\end{array}$$

típusú partíciók száma összesen, hiszen az első esetben egy darab  $(+0)$  csere történik, a három elemű partícióknál pedig partíciónként legfeljebb egy. Tehát a  $(+0)$  cserék száma nem több, mint  $n_{+,0} + n_{0,+}$ , és fontos, hogy ez minden egyes  $\alpha$  és  $\beta$  közti útra egy magától az úttól független becslés.

Tehát az olyan tagok száma, melyekben a  $b = (+0)$  az

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\lambda(\alpha)\lambda(\beta) \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{|S_{\alpha,\beta}|} \sum_{s \in S_{\alpha,\beta}} \left( \sum_{l=0}^{|s|-1} (\varphi(\omega^{l+1}) - \varphi(\omega^l))^2 \right) = \\ = \frac{1}{2}\lambda(\alpha)\lambda(\beta) \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{|S_{\alpha,\beta}|} \sum_{s \in S_{\alpha,\beta}} R(T, s, \omega)\end{aligned}$$

összegben, ahol

$$R(T, s, \omega) = \left( \sum_{l=0}^{|s|-1} \sum_{i=1}^6 (\varphi((T_{i,2}^l \circ T_{i,1}^l)\omega) - \varphi(T_{i,1}^l\omega))^2 + (\varphi(T_{i,1}^l\omega) - \varphi(\omega))^2 \right)$$

legfeljebb  $2W$ , ahol:

$$W = \sum_k k|\{(\alpha, \beta) | \alpha \text{ és } \beta \text{ párra } k = n_{+,0} + n_{0,+}\}| \quad (8)$$



Ez a következők miatt igaz. Minden egyes  $s \in S_{\alpha, \beta}$  útra az  $s$  úthoz tartozó

$$\sum_{l=0}^{|s|-1} \sum_{i=1}^6 (\varphi((T_{i,2}^l \circ T_{i,1}^l)\omega) - \varphi(T_{i,1}^l\omega))^2 + (\varphi(T_{i,1}^l\omega) - \varphi(\omega))^2$$

tagban a fentiek szerint a  $b$  cserét tartalmazó tagok száma legfeljebb  $n_{+,0} + n_{0,+}$ . Így a tagok száma legfeljebb:

$$\sum_{\alpha, \beta} (n_{+,0}^{\alpha, \beta} + n_{0,+}^{\alpha, \beta}) = \sum_k k |\{(\alpha, \beta) | \alpha \text{ és } \beta \text{ párra } k = n_{+,0} + n_{0,+}\}|,$$

ahol  $\alpha, \beta$  felső indexek azt jelzik, hogy az adott  $n$  mely konfiguráció párok közti különbségeket jelöli.

A (8)-es kifejezés tovább alakítva, most már hozzávéve a  $\frac{1}{2}\lambda(\alpha)\lambda(\beta)$  szorzót is:

$$\lambda(\alpha)\lambda(\beta)W = \mathbb{E}(X),$$

ahol  $X$  valószínűségi változó két egyenletes eloszlással kiválasztott konfigurációra az olyan koordináták számát jelöli, ahol az egyik konfigurációban  $+$  áll, a másikban  $0$  vagy fordítva. Legyenek  $X_1, \dots, X_n$  valószínűségi változók, melyekre  $X_i = 1$ , ha az egyik konfiguráció az  $i$ . koordinátáján  $+$  állapot áll, a másik konfiguráció  $i$ . koordinátáján pedig  $0$  állapot áll. Legyen  $X_i = 0$  minden más esetben. Persze ekkor  $X = X_1 + \dots + X_n$  teljesül. Így a várható érték linearitása miatt:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = n\mathbb{E}(X_1) = n \left( \frac{2pz}{n^2} \right) = \frac{2pz}{n}.$$

Vagyis egy adott  $(\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2$  tag, ahol  $b = (+0)$ , szorzója legfeljebb:

$$c(\omega, b) \leq \frac{\frac{2pz}{n}}{\frac{n!}{p!z!m!}pz} = \frac{2}{n}\lambda(\omega)$$

hiszen,  $\frac{n!}{p!z!m!}$  féleképp tudjuk  $\omega$  konfigurációt megválasztani és  $pz$  féleképp a  $b$  cserét.

Míg a Poincaré-egyenlőtlenség jobb oldalán ennek a tagnak a szorzója pont  $\frac{2}{n}\lambda(\omega)$ , hiszen  $\omega$  és  $b$  rögzített, így a bizonyítandó egyenlőtlenség jobb oldalán lévő szummában a  $(\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2$  tag egyszer fordul elő.

Ugyanez a gondolatmenet működik a  $(+-)$  és  $(0-)$  cserékre is, a három kapott eredményt összevetve adódik, hogy

$$\sum_{\omega \in \Omega_{p,m}^n} \lambda(\omega) \varphi^2(\omega) \leq \frac{2}{n} \sum_{\omega \in \Omega_{p,m}^n, b \in B} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2 \lambda(\omega),$$

amit igazolni akartunk.  $\square$

Az előző bizonyításban  $B$ -vel, az összes lehetséges cserék halmazával dolgoztunk. Viszont a modell leírásánál a folyamat motivációjaként azt írtuk, hogy elektromos erőter hatására a pozitív töltésű részecskék szomszédos helyekre ugrálva jobbra haladnak, míg a negatív töltésű részecskék balra. Így  $B^*$  jelölje a szomszédos helyeken létrejövő cserék halmazát, vagyis

$$B^* = \{(k, k+1) | 1 \leq k \leq n, \omega_k - \omega_{k+1} = 1 \text{ vagy } \omega_k - \omega_{k+1} = 2\}$$

Ekkor igaz a következő Poincaré-egyenlőtlenség:

4.1. TÉTEL. Minden  $\varphi : \Omega_{p,m}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény esetén, melyre  $\mathbb{E}\varphi = 0$ , teljesül a Poincaré-egyenlőtlenség:

$$\sum_{\omega \in \Omega_{p,m}^n} \lambda(\omega) \varphi^2(\omega) \leq n^2 \sum_{\omega \in \Omega_{p,m}^n, b \in B^*} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2 \lambda(\omega),$$

ahol  $B^*$  a fent definiált.

*Bizonyítás.* A tétel bizonyítása azonos a [1] cikkben látottakkal. Az előző tétel eredményét fogjuk kihasználni. Elsőként  $(\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2$  tagot alakítjuk át: jussunk el  $\omega^b$ -ből  $\omega$ -ba (vagy fordítva, amelyik lehetséges) egy úton, hogy közben csak  $B^*$ -beli cseréket végzünk, vagyis egy részecske szomszédos helyekre lépkedve "vándorol":

$$\omega^b := \alpha^k \rightarrow \dots \rightarrow \alpha^0 =: \omega$$

a Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$\begin{aligned} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2 &= \left( \sum_{i=0}^{k-1} (\varphi(\alpha^{i+1}) - \varphi(\alpha^i)) \right)^2 \leq \\ &\leq \left( \sum_{i=0}^{k-1} 1^2 \right) \left( \sum_{i=0}^{k-1} (\varphi(\alpha^{i+1}) - \varphi(\alpha^i))^2 \right) \leq \\ &\leq n \left( \sum_{i=0}^{k-1} (\varphi(\alpha^{i+1}) - \varphi(\alpha^i))^2 \right). \end{aligned}$$

Vagyis

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega_{p,m}^n, b \in B} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2 &\leq \sum_{\omega \in \Omega_{p,m}^n, b \in B} n \left( \sum_{i=0}^{k-1} (\varphi(\alpha^{i+1}) - \varphi(\alpha^i))^2 \right) \leq \\ &\leq n^3 \sum_{\omega \in \Omega_{p,m}^n, b \in B^*} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2, \end{aligned}$$

hiszen egy adott  $(\varphi(\alpha^{i+1}) - \varphi(\alpha^i))^2$  tag nem szerepelhet többször a fenti szummában, mint  $n^2$ , hiszen a "vándorló" részecske (legyen az 1-es vagy -1-es) kevesebb,

mint  $n$  helyről indulhatott, és kevesebb mint  $n$  helyre érkezhett. Felhasználva előző tételünk eredményét:

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega_{p,m}^n} \lambda(\omega) \varphi^2(\omega) &\leq \frac{2}{n} \sum_{\omega \in \Omega_{p,m}^n, b \in B} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2 \lambda(\omega) \leq \\ &\leq 2n^2 \sum_{\omega \in \Omega_{p,m}^n, b \in B^*} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2 \lambda(\omega) \end{aligned}$$

adódik, ezzel a bizonyítást befejeztük. □

### Hivatkozások

- [1] T. FUNAKI, K. UCHIYAMA, H.T. YAU: *Hydrodynamic limit for lattice gas reversible under Bernoulli measures*, in: Nonlinear Stochastic PDEs. Ed: T. Funaki and W.A. Woyczinski (Springer, New York, 1996) 1–40.
- [2] JÓZSEF FRITZ, KATALIN NAGY : *On uniqueness of the Euler limit of one-component lattice gas models.*, ALEA Latin American Journal of Probability and Math. Stat., (2006) 367–392.
- [3] LAURENT SALOFF-COSTE: *Lectures on finite Markov chains*, in: Lectures on Probability Theory and Statistics, Springer (1997)
- [4] JÓZSEF FRITZ AND BÁLINT TÓTH: *Derivation of the Leroux system as the hydrodynamic limit of a two-component lattice gas.* Communications in Mathematical Physics **249**, (2004) 1–27.
- [5] BÁLINT TÓTH, BENEDEK VALKÓ: *Onsager relations and Eulerian hydrodynamic limit for systems with several conservation laws.* Journal of Statistical Physics **112**, (2003) 497–521.
- [6] S. ETHIER, T. KURTZ: *Markov Processes: Characterization and Convergence.* Wiley, New York (1986)

(Beérkezett: 2010. január 20.)

MÁNFAY MÁTÉ  
Central European University  
1051 Budapest, Nádor utca 9.  
MTA SZTAKI  
1111 Budapest, Kende u. 13-17.  
e-mail: manfay@sztaki.hu

## POINCARÉ INEQUALITY FOR INTERACTIVE PARTICLE SYSTEMS

MÁTÉ MÁNFAY

The Poincaré inequality is an important tool in the theory of continuous Markov processes. It can be used to analyze the hydrodynamic behavior of the process. Previously T. Funaki, K. Uchiyama and H.T. Yau proved the inequality for the simple symmetric exclusion process. In this case, the constant has an order of  $n^2$ , where  $n$  denotes the size of the system. In this paper we deal with the simple symmetric exclusion process with positive and negative charges. The main result of the paper is the proof of the Poincaré inequality for this model with a constant that has the same order as in the previous model.

## EGY INTERVALLUM ALAPÚ GLOBÁLIS OPTIMALIZÁLÁSI MÓDSZER ÉS ALKALMAZÁSA SZENZOR LOKALIZÁLÁSI FELADATRA

PÁL LÁSZLÓ ÉS CSENDES TIBOR

A cikkben egy intervallum alapú optimalizálási módszer egy új implementációját mutatjuk be. Az algoritmust MATLAB környezetben valósítottuk meg az INTLAB csomagot használva, amely tartalmazza a szükséges intervallum aritmetikai műveleteket és az automatikus differenciálást is. A numerikus eredmények alapján az új INTLAB alapú implementáció hasonlóan hatékony, mint a C-XSC alapú eredeti algoritmus – eltekintve a számítási időtől. A program más hasonló programokkal összevetve könnyen telepíthető és használható. A cikkben vizsgálunk továbbá egy új feltételt a Newton-lépés bekapcsolására, valamint egy szenzorhálózati alkalmazást mutatunk be, és tanulmányozunk az INTLAB alapú algoritmussal.

### 1. Bevezető

A megoldandó feladat az intervallum korlátos globális optimalizálási probléma a következő formában:

$$\min_{x \in X} f(x),$$

ahol  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X = \{x_i \in [\underline{x}_i, \bar{x}_i], i = 1, \dots, n\}$ , és  $\underline{x}_i, \bar{x}_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Az  $f$  függvényről általában feltételezzük, hogy sima. A mi algoritmusunk is erre támaszkodik, ennek ellenére nem sima függvények optimalizálására is használható, ha elhagyjuk belőle a Newton-lépést és a konkávitási tesztet.

Globális optimalizálási módszerek segítségével nehéz matematikai feladatokat sikerült megoldani az elmúlt évszázadban. Ezek a problémák a dinamikus rendszerek [3, 9, 10], a diszkrét geometria, illetve az optimális körpakolás [15, 20] témakörébe tartoznak. Sikeresen alkalmaztuk ezen módszereket továbbá elméleti kémiai feladatokra [2], valamint üzemelhelyezési feladatokban [22].

Célunk egy könnyen használható, megbízható globális optimalizálási módszer implementálása és tesztelése volt MATLAB környezetben. Egy korábbi sikeres implementációnk MATLAB környezetben a GLOBAL [11] nevű sztochasztikus globális optimalizálási algoritmus.

A jelen cikkben vizsgált eljárás csak egy, a célfüggvény kiszámítására szolgáló szubrutinra támaszkodik. Más információt nem használ a globális optimalizálási



problémára vonatkozóan. Az eljárás maga határozza meg a célfüggvény gradienst és Hesse-mátrixát, felhasználva az INTLAB csomag automatikus differenciáló eljárásait.

## 2. Az algoritmus és implementálása

Az implementált algoritmus egy korlátozás és szétválasztás típusú módszer, amelynek pszeudokódját az 2.1. Algoritmusban adtuk meg. A módszer elődje a Numerical Toolbox for Verified Computing [12] csomagban volt implementálva. Jelenleg a következő gyorsító tesztek tartalmazza: középponti teszt, konkávitási teszt, monotonitási teszt és intervallumos Newton-lépés. A természetes befoglaláson kívül a középponti formulákat is alkalmazzuk mint befoglaló függvényt. Ha a gradiens befoglalása ismert, akkor az előbbi két befoglaló függvény metszete általában jó megközelítést ad a függvény értékkészletére.

Az algoritmusban használt jelölések:

$w(X) = b - a$ , ahol  $X = [a, b]$ ,

$\text{mid}(X) = (a + b)/2$ ,

és  $F$  az  $f$  célfüggvénynek megfelelő befoglaló függvény.

A keresési tartományok felosztására szeletelést, illetve fejlett felosztási irányt választó [14] szabályokat használunk. A szeletelés azt jelenti, hogy az intervallumot felosztjuk három másik intervallumra a két legmegfelelőbb irányt használva. A felosztási irány megválasztása a C típusú szabály ([7, 14]) alapján történik. Az algoritmus egydimenziós feladatok megoldására is alkalmazható. Ebben az esetben a szeletelés helyett egy sima kettéosztást használunk.

A felosztás során keletkezett intervallumokat rendezett listában tároljuk valamilyen rendezési szabály alapján. Az algoritmusban a  $pf^*$  heurisztikus paramétert [7] használjuk a lista rendezésére. Pontosabban, mindig a lista legnagyobb  $pf^*$  értékkel rendelkező intervallumát osztjuk fel. Egy előző cikkben [18] a befoglalások legkisebb alsó korlátja szerinti rendezést is vizsgáltunk.

Az algoritmus nem keresi meg az összes globális minimum pontot, hanem az elsőnél leáll, ha az azt tartalmazó intervallum befoglalásának szélessége kisebb, mint  $10^{-8}$ .

Az implementálás során követtük a Markót Mihály Csaba által készített C-XSC alapú program [16] szerkezetét. Természetesen ahol lehetett, használtuk a MATLAB vektor struktúráit. Ez utóbbi programozás technika a processzor csővezetékének (pipeline) jobb kihasználása révén az eljárás gyorsítását eredményezi.

Az algoritmus tartalmaz egy fő iterációs struktúrát a 4. sortól a 36. sorig. Az iterációk során két listát kezelünk: egy munka-, valamint egy temporális listát. Minden iteráció elején meghatározzuk az optimális vágási irányokat (5. sor), majd ezek alapján felosztjuk az aktuális intervallumot három másik intervallumra (6. sor). A 8. és 15. sorok között rendre a kapott intervallumokra végrehajtunk egy monotonitási- (8. sor), egy kivágási tesztet (10. sor), valamint alkalmazzuk a

---

**Algorithm 2.1** A tanulmányozott intervallum korlátos globális optimalizálási algoritmus

---

```

1. function GlobalOptimize ( $f, X, \epsilon$ )
2.    $L_{work} := \emptyset; L_{temp} := \emptyset$ 
3.    $Y := X; \tilde{f} := \overline{F}(\text{mid}(X))$ 
4.   repeat
5.     OptimalComponents( $Y, k_1, k_2$ )
6.     Trisection( $Y, k_1, k_2, U^1, U^2, U^3$ )
7.     for  $i := 1$  to 3 do
8.       if MonotonicityTest( $\nabla F(U^i)$ ) then next  $i$ 
9.        $f_U := F(U^i)$ 
10.      if  $\tilde{f} < \underline{f_U}$  then next  $i$ 
11.       $f_U := f_U \cap \text{CenteredForm}(U^i, \nabla F(U^i))$ 
12.      if  $\overline{F}(\text{mid}(U^i)) < \tilde{f}$  then
13.         $\tilde{f} := \overline{F}(\text{mid}(U^i))$ 
14.         $L_{work} := \text{CutOffTest}(L_{work}, \tilde{f})$ 
15.        if  $\tilde{f} \geq \underline{f_U}$  then  $L_{temp} := L_{temp} \cup (U^i, \underline{f_U})$ 
16.      if length( $L_{temp}$ ) = 1 then
17.         $U := \text{Head}(L_{temp})$ 
18.        if not ConcavityTest( $\nabla^2 F(U)$ ) then
19.          NewtonStep( $f, U, \nabla^2 F(U), V, p$ )
20.        for  $i := 1$  to  $p$  do
21.          if MonotonicityTest( $\nabla F(V^i)$ ) then next  $i$ 
22.           $f_V := F(V^i) \cap \text{CenteredForm}(V^i, \nabla F(V^i))$ 
23.          if  $\overline{F}(\text{mid}(V^i)) < \tilde{f}$  then
24.             $\tilde{f} := \overline{F}(\text{mid}(V^i))$ 
25.             $L_{work} := \text{CutOffTest}(L_{work}, \tilde{f})$ 
26.            if  $\tilde{f} \geq \underline{f_V}$  then  $L_{work} := L_{work} \cup (V^i, \underline{f_V})$ 
27.      else
28.        while  $L_{temp} \neq \emptyset$  do
29.           $U := \text{Head}(L_{temp})$ 
30.           $L_{work} := L_{work} \cup (U, \underline{f_U})$ 
31.      if  $L_{work} \neq \emptyset$  then
32.         $Y := \text{Head}(L_{work})$ 
33.        if  $w(f_Y) < \epsilon$  then
34.           $f^* := [f_Y, \tilde{f}]$ 
35.          return  $Y, f^*$ 
36.    until  $L_{work} = \emptyset$ 

```

---

középponti formulát (11. sor). A 14. sorban a munka listát aktualizáljuk az új felső korlát alapján. Ha az aktuális intervallumot nem sikerült eldobni az előbbi lépések során, akkor tároljuk a temporális listában (15. sor). A három intervallum feldolgozása után, ha a temporális lista csak egy elemet tartalmaz (16. sor), akkor erre végrehajtunk egy konkávitási tesztet (18. sor) valamint egy Newton-lépést (19. sor). A Newton-lépés eredményeként kapott intervallumokra a korábban leírt lépéseket hajtjuk végre. Ha a lista több mint egy elemet tartalmaz, akkor ezeket tároljuk a munka listában (30. sor). Az iteráció végén (31. és 35. sorok között), ha a munka lista nem üres, akkor kivesszük annak első elemét, és megvizsgáljuk, hogy az intervallum befoglalásának szélessége kisebb-e, mint egy előre megadott érték (33. sor). Ha ez a feltétel teljesül, akkor az intervallumot és az optimum értéket tartalmazó intervallummal együtt visszaadjuk eredményként (35. sor), különben folytatjuk a következő iterációval.

Az új algoritmus használatához szükség van az INTLAB csomag [19] telepítésére. Az INTLAB csomagot a Hamburgi Egyetemen fejlesztette ki Siegfried M. Rump és ingyenesen használható nem kereskedelmi céllal, illetve a kutatásban is. A program számos MATLAB verzió alatt volt tesztelve egészen az R2009b változatig. A csomag a

<http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/intlab/>

helyről tölthető le, ahol található egy telepítési útmutató is. Letöltés után a programot ki kell csomagolni, majd MATLAB környezetben futtatni kell a `startintlab.m` szkriptet, amely tulajdonképpen telepíti a csomagot. Az INTLAB 5.5 és korábbi verziói esetén előfordulhat, hogy nem sikerül a telepítés. Ennek az lehet az oka, hogy a MATLAB az Intel Math Kernel Library (IMKL) csomagot használja a numerikus műveletekre. A megoldás az, hogy az Atlas könyvtárat használjuk az IMKL helyett. A Windows rendszer alatt a `BLAS_VERSION` környezeti változót kell beállítani az `atlas***.dll` értékre, ahol a `***` a processzor típusát jelenti (Pentium 4 esetén `'atlas_P4.dll'`). A szükséges fájl a `...\MATLAB\bin\win32\` mappában található. Az új 6.0 verzió esetén a környezeti változó beállítása nélkül is problémamentesen települ az INTLAB.

Linux alatt a következő utasítással állíthatjuk be a megfelelő könyvtárat:

```
export BLAS_VERSION="atlas_P4.so"
```

Lényeges, hogy telepítés után valahányszor szükség van az INTLAB csomagra, mindig el kell indítani azt a `startintlab` paranccsal.

Az INTLAB elindítása után új intervallumot az alábbi utasítás segítségével hozhatunk létre:

```
infsup(a,b).
```

Az intervallumok alapértelmezett megjelenítési formája a bizonytalanságot megjelenítő mód. Például

```
a = infsup(3.14, 3.15)
```

eredménye

```
intval a = 3.15_.
```

A hagyományos intervallum megjelenítési formát az

```
intvalinit('displayinfsup')
```

paranccsal állíthatjuk be, amelynek eredményeképpen az intervallum kiírási alakja:

```
intval a = [3.14, 3.15].
```

Intervallumokkal persze különböző műveleteket is végezhetünk. Például az  $x = \text{infsup}(0, 1)$ ; és  $y = \text{infsup}(2, 3)$ ; intervallumok osztásának eredménye ( $x/y$ ):

```
intval ans = [0.0000, 0.5000].
```

Míg  $\sin(x)$  az

```
intval ans = [0.0000, 0.8415]
```

intervallumot eredményezi.

Számos más példát és bemutató programot találhatunk az INTLAB [19] leírásában. Az új MATLAB/INTLAB alapú intervallumos globális optimalizálási program letölthető a

[www.inf.u-szeged.hu/~csendes/Reg/regform.php](http://www.inf.u-szeged.hu/~csendes/Reg/regform.php)

címről. A letöltött csomag tartalmazza a szükséges állományokat és a tesztkörnyezetet is.

### 3. Az intervallumos globális optimalizáló program használata

Az intervallumos globális optimalizáló programot viszonylag egyszerű használni, ugyanis a felhasználónak csak az optimalizálandó feladatot kell elhelyeznie a TestFunctions mappába, majd futtatni a MainTester programot. A mappába egyszerre több feladatot is be lehet tenni, és megoldani.

Az optimalizálandó problémát két állomány segítségével kell megadni. Az egyik (ennek neve \*.bnd lesz) tartalmazza a feladat olyan adatait, mint például a feladat neve, dimenziója, intervallum korlátok a változókra, és a megkövetelt pontosság. A másik fájl pedig a célfüggvényt adja meg (a neve \*.m). Például a Shekel-5 standard globális optimalizálási tesztfeladat esetén a két állomány sh5.bnd és sh5.m. Az sh5.bnd fájl tartalma:

```

S5
4
0 10
0 10
0 10
0 10
1e-8

```

A célfüggvényt tartalmazó sh5.m állomány tartalma pedig:

```

function y = sh5(x)

m = 5;
a = ones(10,4);
a(1,:) = 4.0*a(1,:);
a(2,:) = 1.0*a(2,:);
a(3,:) = 8.0*a(3,:);
a(4,:) = 6.0*a(4,:);
for j = 1:2;
    a(5,2*j-1) = 3.0; a(5,2*j) = 7.0;
    a(6,2*j-1) = 2.0; a(6,2*j) = 9.0;
    a(7,j)      = 5.0; a(7,j+2) = 3.0;
    a(8,2*j-1) = 8.0; a(8,2*j) = 1.0;
    a(9,2*j-1) = 6.0; a(9,2*j) = 2.0;
    a(10,2*j-1)= 7.0; a(10,2*j)= 3.6;
end
c(1) = 0.1; c(2) = 0.2; c(3) = 0.2; c(4) = 0.4; c(5) = 0.4;
c(6) = 0.6; c(7) = 0.3; c(8) = 0.7; c(9) = 0.5; c(10)= 0.5;
s = 0.0;
for j = 1:m;
    p = 0.0;
    for i = 1:4
        p = p+(x(i)-a(j,i))^2;
    end
    s = s+1.0/(p+c(j));
end y = -s;

```

A MainTester futtatása után az eredményt az alábbi formában kapjuk meg:

Function name: S5

The set of global minimizers is located in the union of the following boxes:

c1: [4.00003713662883, 4.00003718945147]



```
[4.00013323800906, 4.00013329348396]
[4.00003713910016, 4.00003717168197]
[4.00013326916774, 4.00013328566954]
```

The global minimum is enclosed in:

```
[-10.153199679058694, -10.153199679058199]
```

Statistics:

Iter	Feval	Geval	Heval	MLL	CPUt(sec)
16	126	86	7	10	6.69

Előfordulhat természetesen, hogy eredményként több intervallumot is kapunk. A globális minimum pontok ezen intervallumok egyesítésében találhatók. Az eredmény kiírt alakja tartalmazza a feladat megoldása során mért szokásos hatékonysági mutatókat: az iteráció számot, a függvényhívások számát, a gradienshívások számát, a Hesse-mátrix kiértékelések számát, a maximális lista hosszat és a CPU időt.

Az optimalizáló eljárás közvetlenül, parancssorból is használható a következő módon:

```
>> addpath(' ./', './Utils', 'TestFunctions')
>> amin = [0; 0; 0; 0]
>> amax = [10; 10; 10; 10]
>> b = infsup(amin,amax)
>> [intv, min, stats] = GOP(@sh5, b, 1e-8)
```

Lehetőség van arra is, hogy úgy használjuk az optimalizáló eljárást, hogy a szükséges két állományt nem adjuk meg, hanem a célfüggvényt inline módon definiáljuk. Erre tekintünk az alábbi példát:

```
>> f = inline('x(1)^2+x(2)^2+1')
>> amin = [-2; -2]
>> amax = [1; 1]
>> int = infsup(amin,amax)
>> [intv, min, stat] = GOP(f, int, 1e-8)
```

#### 4. A C-XSC alapú algoritmus és az INTLAB alapú módszer összehasonlítása

Az INTLAB alapú algoritmust numerikusan teszteltük. A célunk az volt, hogy megvizsgáljuk ennek hatékonyságát a szokásos hatékonysági mutatókkal, valamint

összehasonlítani a kapott eredményeket a C-XSC alapú algoritmus megfelelő mutatóival.

A teszteket MATLAB R2008a környezetben, INTLAB 5.5-ös verzió alatt végeztük, Pentium 4-es (2 Gbyte RAM memóriával ellátott, Core 2 Duo, 2 GHz-es processzorú) számítógépen. A tesztfeladatok halmaza tartalmazta az összes standard globális optimalizálási függvényt is. Hasonló feladathalmazon végeztünk tesztelést a [7, 8] cikkekben.

A numerikus eredményeket az 1. és 2. táblázatokban összegeztük. A táblázatok első két oszlopa a probléma nevét és dimenzióját tartalmazza. A függvény nevek helyett azok rövidítéseit használtuk, például Shekel-5 helyett S5, Schweffel 3.2 helyett Sch3.2, Ratz-4 helyett R4 szerepel stb. A többi oszlop a szokásos hatékonysági mutatókat tartalmazza, mint amilyen az iteráció szám (ITSz), a függvényhívások száma (FHSz), a gradienshívások száma (GHSz), a Hesse-mátrix kiértékelések száma (HHSz), a maximális munka lista hossza (MLH) és a szükséges CPU idő másodpercben (CPU).

A két implementáció esetén a hatékonysági mutatók (egy, a CPU idő kivételével) megegyeznek, vagy hasonlók. Ez nagyjából annak tudható be, hogy a két algoritmus struktúrája közel megegyezik. A CPU idő esetén nagy eltérés figyelhető meg. Az INTLAB alapú implementáció átlagosan 442-szer több időt igényel ugyanannak a feladatnak a megoldásához. Az arányok az egyes feladatok esetén 16 és 1251 között változnak, és a médián értéke erre az arányra 345. A nagyobb számok azon feladatok esetén figyelhetők meg, ahol sok számításra volt szükség. A nagy futásidőbeli különbségek a MATLAB interpreter módban való működésének tudhatók be.

Az összehasonlítás eredményeképpen elmondható, hogy MATLAB környezetben az INTLAB alapú algoritmus egyszerűen használható, viszont hátránya a sebesség visszaesése. Ennek ellenére az új globális optimalizálási módszer hasznos modellező eszköz lehet optimalizálási feladatok kezdeti tanulmányozására. Különösen igaz ez olyan feladatok esetén, amelyekre a CPU idő a növekedés ellenére is elfogadható mértékű (legfőleg pár perc). A számítási környezet interaktivitása előnyös olyan esetekben, amikor kezdeti lehetőségek közötti választás céljából nagy számú kísérletet végzünk eltérő beállításokkal, illetve modellekkel.

## 5. A Newton-lépés bekapcsolásának vizsgálata

A Newton-lépést az algoritmus gyorsítására használjuk. Tulajdonképpen egy intervallumos Newton-Seidel-lépést alkalmazunk a célfüggvény gradiensére, ezáltal megpróbálunk közeli korlátokat adni a minimum helyekre. A teljes Newton-algoritmust nem futtatjuk le, mert az túl költséges lenne, ezért alkalmazunk csak iterációnként egy-egy lépést.

1. táblázat. A C-XSC- és az INTLAB alapú algoritmusok eredményeinek összehasonlítása. A táblázatban Dim a feladat dimenzióját jelenti, ITSz az iteráció számot, FHSz a függvényhívások számát, és GHSz a gradiens hívások számát.

Feladat	Dim	A C-XSC kód			Az INTLAB kód		
		ITSz	FHSz	GHSz	ITSz	FHSz	GHSz
S5	4	16	126	86	16	126	86
S7	4	18	129	84	17	121	78
S10	4	17	122	78	17	123	78
H3	3	38	256	187	23	147	99
H6	6	191	1 505	1 167	191	1 505	1 167
GP	2	76	458	229	76	458	229
SHCB	2	17	103	60	17	103	60
THCB	2	44	274	189	44	274	189
BR	2	44	250	177	44	250	177
RB	2	38	238	151	38	238	151
RB5	5	389	3 584	2 713	396	3 660	2 758
L3	2	47	293	170	47	293	170
L5	2	86	593	406	86	593	406
L8	3	11	80	55	11	80	55
L9	4	13	107	73	13	107	73
L10	5	15	125	86	15	125	86
L11	8	23	189	128	23	189	128
L12	10	30	254	175	30	254	175
L13	2	10	74	47	10	74	47
L14	3	15	120	77	15	120	77
L15	4	17	136	87	18	146	94
L16	5	19	142	88	19	142	88
L18	7	27	206	130	27	206	130
Schw2.1	2	113	803	580	113	804	580
Schw3.1	3	14	96	64	14	96	64
Schw2.5	2	50	293	205	50	293	205
Schw2.14	4	353	3 146	2 263	356	3 242	2 337
Schw2.18	2	3	21	13	3	21	13
Schw3.2	3	20	144	98	20	144	98
Schw3.7_5	5	45	309	208	45	309	208
Schw3.7_10	10	696	4 371	2 665	696	4 371	2 665
Griew5	5	25	190	117	25	190	117
Griew7	7	40	297	173	40	297	173
R4	2	35	210	125	35	210	125
R5	3	107	996	748	107	996	748
R6	5	140	1 516	1 221	140	1 516	1 221
R7	7	204	2 728	2 293	204	2 728	2 293
R8	9	310	4 723	4 063	320	4 881	4 201
EX2	5	5 975	37 816	27 834	9 279	59 605	44 126

2. táblázat. A C-XSC -és az INTLAB alapú algoritmusok eredményeinek összehasonlítása. A táblázatban Dim a feladat dimenzióját jelenti, HHSz a Hesse-mátrix kiértékelések számát, MLH a maximális lista hosszát, valamint CPU a futási időt másodpercben.

Feladat	Dim	A C-XSC kód			Az INTLAB kód		
		HHSz	MLH	CPU	HHSz	MLH	CPU
S5	4	7	10	0.02	7	10	5.66
S7	4	7	14	0.02	6	14	7.27
S10	4	6	16	0.03	6	17	10.36
H3	3	22	21	0.00	11	16	5.09
H6	6	86	64	0.43	86	64	97.45
GP	2	0	153	0.00	0	153	9.25
SHCB	2	3	22	0.00	3	22	1.70
THCB	2	21	24	0.00	21	24	3.75
BR	2	18	10	0.00	18	10	3.44
RB	2	11	11	0.00	11	11	1.59
RB5	5	309	74	0.15	317	79	93.13
L3	2	8	57	0.01	8	57	10.06
L5	2	31	32	0.05	31	32	26.25
L8	3	5	9	0.01	5	9	2.34
L9	4	7	13	0.01	7	13	4.08
L10	5	8	15	0.03	8	15	5.95
L11	8	9	28	0.07	9	28	14.11
L12	10	11	36	0.09	11	36	23.89
L13	2	4	9	0.01	4	9	1.45
L14	3	7	12	0.00	7	12	3.16
L15	4	7	19	0.00	8	19	4.84
L16	5	6	20	0.03	6	20	5.56
L18	7	8	26	0.01	8	26	10.80
Schw2.1	2	53	25	0.01	53	25	12.50
Schw3.1	3	5	6	0.00	5	6	1.58
Schw2.5	2	27	4	0.00	27	4	2.13
Schw2.14	4	209	119	0.10	216	123	47.98
Schw2.18	2	1	4	0.01	1	4	0.16
Schw3.2	3	11	7	0.00	11	7	1.66
Schw3.7_5	5	24	32	0.03	24	32	7.13
Schw3.7_10	10	192	818	0.48	192	818	183.59
Griew5	5	7	28	0.02	7	28	5.94
Griew7	7	8	58	0.06	8	58	12.48
R4	2	6	36	0.00	6	36	2.23
R5	3	71	57	0.05	71	57	27.20
R6	5	100	30	0.25	100	30	71.72
R7	7	168	41	0.35	168	41	184.78
R8	9	261	59	1.17	270	59	429.48
EX2	5	3 149	534	3.51	5 020	576	4 390.09

A Newton-lépés alkalmazása minden egyes részintervallumra szintén költséges lenne, ezért célszerű valamilyen feltételt használni ennek bekapcsolására. Egy korábbi cikk [16] alapján algoritmusunkban a Newton-lépést csak abban az esetben használtuk, ha a felosztás során keletkezett három részintervallumból a többi gyorsító lépés végrehajtása után már csak egy részintervallum maradt.

A továbbiakban egy új bekapcsolási feltételt vizsgálunk. Ennek az a lényege, hogy minden olyan részintervallumra alkalmazzuk a Newton-lépést, amelynek szélessége kisebb, mint egy előre megadott érték, ugyanis a Newton-lépés igazából akkor hatékony, ha az adott argumentum intervallum már elég kicsi. Az új feltételben 0.1 értéket használtunk az intervallum szélessége küszöbértékének.

### 5.1. Elméleti vizsgálat

Vannak esetek, amikor az előbbi feltételt alkalmazva a Newton-lépés nem eredményes abban az értelemben, hogy vagy nem is csökken az intervallum mérete, vagy sok darabra osztja fel az aktuális intervallumot. A gyakorlatban többnyire az utóbbi eset szokott előfordulni, amely azért nem előnyös, mert hasonló eredményt érhetünk el egyszerű kettéosztással is, de jóval kisebb költséggel. A Newton-lépés hatékonysága több-dimenziós esetben méginkább romolhat, ugyanis a dimenzió növekedéssel az új részintervallumok száma is növekszik.

A továbbiakban feltételezzük, hogy a másodrendű derivált befoglalása, amelyre a Newton-lépés nem eredményes, az alábbi alakú:

$$F''_{uj}(X) = \left[ \underline{F}''(X) - D \cdot w(F''(X)), \overline{F}''(X) + D \cdot w(F''(X)) \right], \quad (1)$$

ahol  $F''(X)$  a másodrendű derivált egy befoglalása az  $X$  intervallumon, és  $D$  egy pozitív valós szám.  $F''(X)$  lehet a másodrendű derivált értékkészlete is  $X$ -en. Hasonló alakú befoglalófüggvényt feltételezték az [5, 6] cikkekben is, a gyakorlatban használt befoglaló függvények körében a szimmetrikus túlbecslés gyakori.

A következő két tétel arra akar rávilágítani, hogy milyen esetekben nem lesz a Newton-lépés hatékony.

**5.1. TÉTEL.** *Adott  $f$  egyváltozós függvény és  $X$ ,  $w(X) < \epsilon$  intervallum esetén létezik olyan befoglaló függvény, amelyre a Newton-lépés nem eredményes abban az értelemben, hogy vagy nem is csökken az intervallum mérete, vagy sok darabra osztja fel az  $X$  intervallumot.*

*Bizonyítás.*

Az egydimenziós  $f(x)$  függvény esetén a Newton-iteráció az alábbi összefüggésekkel írható le:

$$N\left(X^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}\right) = \tilde{x}^{(k)} - \frac{f'(\tilde{x}^{(k)})}{F''(X^{(k)})}, \quad (2)$$

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} \cap N\left(X^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}\right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

ahol  $\tilde{x}^{(k)} = \text{mid}(X^{(k)})$ ,  $f'$  az elsőrendű derivált,  $F''$  a másodrendű derivált befoglalása.

Legyen egy, a  $w(X) < \epsilon$  feltételnek megfelelő  $X = [a, b]$  intervallum és  $F''(X) = [c, d]$ . A Newton-lépés akkor nem eredményes, ha a (2) egyenletben a másodrendű derivált tartalmazza a nullát, és a metszetképzés (3) után eredményként két intervallumot kapunk. A Newton-lépés ezen eredménye azért nem hasznos, mert ezt elérhetjük egy egyszerű kettéosztással is, amely olcsóbb művelet, mint a Newton-lépés. A kérdés az, hogy milyen túlbecslésre van szükség ahhoz, hogy a másodrendű derivált befoglalása tartalmazza a nullát és a metszetképzés után két intervallumot kapjunk eredményül.

A továbbiakban feltételezzük, hogy  $0 \notin F''(X)$  és  $F''_{uj}(X) = [c', d']$ . A feladat  $c'$  és  $d'$  értékeit úgy meghatározni, hogy  $0 \in F''_{uj}(X)$  teljesüljön.

A korábbi jelölésekkel a Newton-operátor a következő alakú lesz:

$$N(X, \tilde{x}) = \tilde{x} - \frac{f'(\tilde{x})}{F''_{uj}(X)} = \tilde{x} - \frac{f'(\tilde{x})}{[c', d']}. \quad (4)$$

1. **Eset:** amikor  $f'(\tilde{x}) > 0$ . Ekkor  $N(X, \tilde{x}) = \left(-\infty, \tilde{x} - \frac{f'(\tilde{x})}{d'}\right] \cup \left[\tilde{x} - \frac{f'(\tilde{x})}{c'}, \infty\right)$ .  
Az  $X \cap N(X, \tilde{x})$  művelet eredményeként akkor kapunk két intervallumot, ha teljesül

$$a < \tilde{x} - \frac{f'(\tilde{x})}{d'}, \quad (5)$$

$$b > \tilde{x} - \frac{f'(\tilde{x})}{c'}. \quad (6)$$

Az (5) és (6) egyenlőtlenségekből rendre azt kapjuk, hogy:

$$d' > 2 \cdot \frac{f'(\tilde{x})}{w(X)}, \quad (7)$$

$$c' < -2 \cdot \frac{f'(\tilde{x})}{w(X)}. \quad (8)$$

A (7) és (8), valamint az (1) összefüggésekből következik:

$$c - D \cdot w(F''(X)) < -2 \cdot \frac{f'(\tilde{x})}{w(X)}, \quad (9)$$

$$d + D \cdot w(F''(X)) > 2 \cdot \frac{f'(\tilde{x})}{w(X)}. \quad (10)$$

Innen  $D$ -re a következő egyenlőtlenségek adódnak:

$$D > D_1 = \frac{2 \cdot f'(\tilde{x}) + c \cdot w(X)}{w(X) \cdot w(F''(X))}, \quad (11)$$

$$D > D_2 = \frac{2 \cdot f'(\tilde{x}) - d \cdot w(X)}{w(X) \cdot w(F''(X))}. \quad (12)$$

Tehát, ha  $D > \max(D_1, D_2)$ , akkor a Newton-lépés eredményeként két intervallumot kapunk.

**2. Eset:** amikor  $f'(\tilde{x}) < 0$ . Ekkor  $N(X, \tilde{x}) = \left(-\infty, \tilde{x} - \frac{f'(\tilde{x})}{c'}\right] \cup \left[\tilde{x} - \frac{f'(\tilde{x})}{d'}, \infty\right)$ .

Az első esethez hasonló gondolatmenettel azt kapjuk  $D$ -re, hogy:

$$D > D_1 = \frac{-2 \cdot f'(\tilde{x}) + c \cdot w(X)}{w(X) \cdot w(F''(X))}, \quad (13)$$

$$D > D_2 = \frac{-2 \cdot f'(\tilde{x}) - d \cdot w(X)}{w(X) \cdot w(F''(X))}. \quad (14)$$

Tehát ebben az esetben, ha  $D > \max(D_1, D_2)$ , akkor a Newton-lépés nem lesz eredményes.

□

Az előbbi bizonyításban a  $D_1$  és  $D_2$  értékek segítségével olyan befoglalását kapjuk a másodrendű deriválnak, amelyre a Newton-módszer két intervallumot ad eredményül. Mivel szimmetrikus túlbecslést feltételeztünk a másodrendű derivált befoglalására, ezért  $D$  értékéül a  $D_1$  és  $D_2$  közül nyilván a nagyobbikat választjuk.

Az 1. esetnek megfelelően, ha most azt vizsgáljuk, hogy a Newton-lépés mikor hatékony, akkor a következő összefüggést kapjuk:

$$D \leq D_1 = \frac{2 \cdot f'(\tilde{x}) + c \cdot w(X)}{w(X) \cdot w(F''(X))}. \quad (15)$$

Ezen összefüggés alapján ismert  $D$  túlbecslési paraméter mellett megadható olyan  $\epsilon$  küszöbérték a Newton-lépés bekapcsolására, amely biztosítani tudja, hogy a Newton-lépés hatékony legyen abban az értelemben, hogy eredményül egy szűkebb intervallumot kapjunk, mint az argumentum intervallum. Az (15) összefüggés alapján

$$w(X) \leq \frac{2 \cdot f'(\tilde{x})}{D \cdot w(F''(X)) - c}.$$

Tehát, ha

$$\epsilon = \frac{2 \cdot f'(\tilde{x})}{D \cdot w(F''(X)) - c},$$

akkor a Newton-lépés eredményeként szűkebb intervallumot kapunk, mint az argumentum intervallum.

Hasonló állítás vezethető le arra az esetre is, ha  $f'(\tilde{x}) < 0$  (ez a 2. eset az 1. tétel bizonyításában).

Egy  $F(X)$  befoglaló függvényt akkor mondunk izotonnak, ha  $X \subseteq Y$ -ből  $F(X) \subseteq F(Y)$  következik. Ez a tulajdonsága csaknem minden, a számítógépes eljárásokban használatos befoglalófüggvénynek megvan. Az (1)-ben definiált  $F''_{uj}$  függvény nyilvánvalóan minden rögzített  $D$  értékre izoton függvény. A következő állítás mégis azt mondja ki, hogy amennyiben a  $D$  konstans értékét úgy kell megválasztani, hogy a Newton-lépés ne legyen eredményes, akkor az így adódó befoglaló függvény nem lesz izoton.

**5.1. ÁLLÍTÁS.** Az 1. tétel bizonyításában megkonstruált  $F''_{uj}$  befoglalófüggvény nem izoton.

*Bizonyítás.* Ennek belátására elegendő ellenpéldát mutatni.

Az  $f(x) = \frac{1}{20}(x+4)(x+2)(x+1)(x-1)(x-3) + 2$  függvény esetén az (1) összefüggéssel és az 1. tétel bizonyításában kidolgozott konstrukcióval megadott befoglaló függvény nem izoton az alábbi intervallumokra.

Ha  $X_1 = [-1.60, -1.5]$ , akkor  $D > 3.7569$ .

Ha  $D = 3.76$ , akkor  $F''_{uj}(X_1) = [-1.41, 7.46]$ .

Ha  $X_2 = [-1.65, -1.45]$ , akkor  $D > 1.3002$ .

Ha  $D = 1.31$ , akkor  $F''_{uj}(X_2) = [-0.70, 6.81]$ .

Ha  $X_3 = [-1.7, -1.4]$ , akkor  $D > 0.6353$ .

Ha  $D = 0.64$ , akkor  $F''_{uj}(X_3) = [-0.46, 6.67]$ .

A példa esetén tehát  $X_1 \subset X_2 \subset X_3$  és  $F''_{uj}(X_3) \subset F''_{uj}(X_2) \subset F''_{uj}(X_1)$ , azaz az előírt tulajdonsággal rendelkező  $F''_{uj}$  nem izoton.  $\square$

Az 5.1. állítás lényegi jelentése tehát az, hogy elegendően kicsi  $\epsilon$  döntési paraméter választása esetén a Newton-lépés eredményességének esélye növelhető.

**5.2. TÉTEL.** Adott  $f$  többváltozós függvény és  $X$ ,  $w(X) < \epsilon$  intervallum esetén létezik olyan befoglaló függvény, amelyre a Newton-lépés nem lesz hatékony, abban az értelemben, hogy vagy nem is csökken az intervallum mérete, vagy sok darabra osztja fel az  $X$  intervallumot.

*Bizonyítás.*

Többváltozós esetben a Newton-módszer iterációs sémája a következő formában írható:

$$G(\tilde{x}^{(k)}) + H(X^{(k)}) \left( N(X^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}) - \tilde{x}^{(k)} \right) = 0 \quad (16)$$

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} \cap N(X^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

ahol  $\tilde{x}^{(k)} = \text{mid}(X^{(k)})$ ,  $G$  a gradiens, és  $H$  a Hesse mátrix befoglalása.

Az  $N$  érték meghatározására a Hansen-Sengupta-operátort használjuk. Ez az operátor a Gauss-Seidel-eljárást alkalmazza. A (16) egyenletet  $H(X)$  középponti inverzével,  $C$ -vel prekondicionálva kapjuk, hogy

$$C \cdot H(X)(N(X, \tilde{x}) - \tilde{x}) = -C \cdot G(\tilde{x}).$$



Bevezetve az

$$M = C \cdot H(X), \quad b = C \cdot G(\tilde{x})$$

mennyiségeket, a komponensenkénti intervallumos Gauss–Seidel-eljárás

$$N(X^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}) = \tilde{x}_i^{(k)} - \frac{b_i + \sum_{j=1}^{i-1} M_{ij} (X_j^{(k+1)} - \tilde{x}_j^{(k+1)})}{M_{ii}} + \frac{\sum_{j=i+1}^n M_{ij} (X_j^{(k)} - \tilde{x}_j^{(k)})}{M_{ii}}, \quad (18)$$

$$X_i^{(k+1)} = X_i^{(k)} \cap N(X^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}) \quad (19)$$

alakú lesz, ahol  $\tilde{x}^{(k)} = \text{mid}(X^{(k)})$  és  $k = 1, 2, \dots$ . Az iterációban, ha az  $N(X^{(k)}, \tilde{x}^{(k)})$   $i$ -dik komponensét kiszámoltuk, akkor elvégezzük a metszetképzést.

A (18) összefüggésből látszik, hogy minden iterációs lépésben az  $M$  mátrix egy főátlóbeli elemével osztunk. Az egyváltozós esettől eltérően, itt nem a másodrendű derivált befoglalását használjuk, hanem a Hesse-mátrix egy prekondicionált változatát. A prekondicionálás célja, hogy az  $M \cdot H(X)$  szorzás eredményeképpen olyan mátrixot kapjunk, amelynek együtthatói jobban kezelhetők a rendszer megoldása során, mint az eredeti mátrix esetén. A (18) egyenlet hasonló a (2) egyenlethez, így a bizonyítás is hasonlóan történik, mint az egyváltozós esetben. A különbség itt az, hogy úgy kell meghatározni a befoglalást, hogy a Hesse-mátrix középponti inverzével való szorzás után tartalmazza a nullát, és a metszetképzés során két intervallumot kapjunk.

Az adott iteráció  $i$ . belső lépésében, ha  $0 \in M_{ii}$ ,  $i = 1, \dots, n$  és a Newton-lépés eredményeként az  $i$ . komponens két intervallum egyesítéseként írható fel, akkor a Newton-lépés két külön részfeladatra osztható. Ezekben a részfeladatokban a kapott  $i$ . komponens helyettesítjük az egyesítésben szereplő egyik intervallummal. Tehát, ha egy komponens esetén igaz a fenti állítás, akkor a Newton-lépés már nem lesz eredményes.  $\square$

## 5.2. Numerikus vizsgálat

Az INTLAB alapú algoritmust teszteltük az új feltétellel és a kapott eredményeket összehasonlítottuk az eredeti feltétellel elért eredményekkel. A tesztkörnyezet beállításai megegyeznek a korábban leírt beállításokkal. A 3. és 4. táblázatok tartalmazzák a függvényekre az eredményeket, valamint az egyes mutatók összesített és átlag értékeit a teljes célfüggvény halmazra vonatkozóan. A két feltételt a kapott hatékonysági mutatókkal nehéz összehasonlítani, ugyanis ezek értékei lényegesen, és persze érthető módon különböznek az új feltételnek köszönhetően. Ezért célszerűbb a két feltételnek megfelelő CPU időket összehasonlítani a teljes függvényhalmazra.

A teljes futásidőt tekintve megállapítható, hogy az új feltétel esetén ez 14 perccel (15%-al) kevesebb, mint a régi esetén. Figyelembe véve azt, hogy az EX2 és a

Schw3.7.10 függvények együttesen a teljes futásidő 80 százalékát igénylik, érdemes megvizsgálni az eredményeket e két feladat elhagyásával. Ebben az esetben azt találjuk, hogy az új feltétel esetén a teljes futásidő 6 perccel (30%-al) lett kevesebb, mint a régi feltétellel. Az eredmények alapján elmondható, hogy az új feltétel segítségével sikerült a szükséges számítási időt lényegesen csökkenteni. Ez a javulás mégis nem minden függvényen figyelhető meg, sőt egyes esetekben (pl. Schw3.7.10) rosszabb értéket kaptunk. Ez azt jelenti, hogy nehéz az új feltétel számára olyan értéket beállítani, amely minden vizsgált feladatra javulást eredményez. A jövőben ennek az értéknek az adaptív beállítását fogjuk megvizsgálni.

A teljes elméleti gondolatmenet hasonló formában megismételhető olyan befoglalt függvényekre is, amelyek túlbecslése nem szimmetrikus.

### 5.3. Numerikus vizsgálat

Az INTLAB alapú algoritmust teszteltük az új feltétellel és a kapott eredményeket összehasonlítottuk az eredeti feltétellel elért eredményekkel. A tesztkörnyezet beállításai megegyeznek a korábban leírt beállításokkal. A 3. és 4. táblázatok tartalmazzák a függvényekre az eredményeket, valamint az egyes mutatók összesített és átlag értékeit a teljes célfüggvény halmazra vonatkozóan. A két feltételt a kapott hatékonysági mutatókkal nehéz összehasonlítani, ugyanis ezek értékei lényegesen, és persze érthető módon különböznek az új feltételnek köszönhetően. Ezért célszerűbb a két feltételnek megfelelő CPU időket összehasonlítani a teljes függvényhalmazra.

A teljes futásidőt tekintve megállapítható, hogy az új feltétel esetén ez 14 perccel (15%-al) kevesebb, mint a régi esetén. Figyelembe véve azt, hogy az EX2 és a Schw3.7.10 függvények együttesen a teljes futásidő 80 százalékát igénylik, érdemes megvizsgálni az eredményeket e két feladat elhagyásával. Ebben az esetben azt találjuk, hogy az új feltétel esetén a teljes futásidő 6 perccel (30%-al) lett kevesebb, mint a régi feltétellel. Az eredmények alapján elmondható, hogy az új feltétel segítségével sikerült a szükséges számítási időt lényegesen csökkenteni. Ez a javulás mégis nem minden függvényen figyelhető meg, sőt egyes esetekben (pl. Schw3.7.10) rosszabb értéket kaptunk. Ez azt jelenti, hogy nehéz az új feltétel számára olyan értéket beállítani, amely minden vizsgált feladatra javulást eredményez. A jövőben ennek az értéknek az adaptív beállítását fogjuk megvizsgálni.

## 6. Alkalmazás

### 6.1. Lokalizálás szenzorhálózatokban

Szenzorhálózati alkalmazásokban nagyon gyakran szükség van az egyes csomópontok földrajzi pozícióinak az ismeretére. Ezért az egyik legfontosabb elvárás az ilyen hálózatokban a csomópontok helymeghatározó képessége. Az elmúlt időszakban számos módszert [1, 4, 13, 17] dolgoztak ki szenzorok lokalizálására.

3. táblázat. A Newton-lépés bekapcsolásának vizsgálata az INTLAB alapú algoritmus esetén. A táblázatban Dim a feladat dimenzióját jelenti, ITSz az iteráció számot, FHSz a függvényhívások számát, GHSz pedig a gradiens hívások számát.

Feladat	Dim	Eredeti feltétel			Új feltétel		
		ITSz	FHSz	GHSz	ITSz	FHSz	GHSz
S5	4	16	126	86	22	117	76
S7	4	17	121	78	22	120	76
S10	4	17	123	78	22	122	76
H3	3	23	147	99	14	82	51
H6	6	191	1 505	1 167	112	560	363
GP	2	76	458	229	53	717	415
SHCB	2	17	103	60	16	105	63
THCB	2	44	274	189	59	284	187
BR	2	44	250	177	71	360	256
RB	2	38	238	151	17	174	117
RB5	5	396	3 660	2 758	608	3 511	2 568
L3	2	47	293	170	32	191	103
L5	2	86	593	406	22	131	73
L8	3	11	80	55	20	98	67
L9	4	13	107	73	26	129	85
L10	5	15	125	86	33	161	106
L11	8	23	189	128	52	253	163
L12	10	30	254	175	65	315	202
L13	2	10	74	47	13	76	49
L14	3	15	120	77	22	121	76
L15	4	18	146	94	28	150	94
L16	5	19	142	88	29	162	97
L18	7	27	206	130	41	226	136
Schw2.1	2	113	804	580	168	758	557
Schw3.1	3	14	96	64	21	122	81
Schw2.5	2	50	293	205	34	161	114
Schw2.14	4	356	3 242	2 337	527	5 914	4 160
Schw2.18	2	3	21	13	19	95	63
Schw3.2	3	20	144	98	25	149	99
Schw3.7_5	5	45	309	208	108	517	364
Schw3.7_10	10	696	4 371	2 665	5 232	22 065	15 781
Griew5	5	25	190	117	53	263	163
Griew7	7	40	297	173	73	363	223
R4	2	35	210	125	21	134	80
R5	3	107	996	748	181	760	544
R6	5	140	1 516	1 221	339	1 409	1 018
R7	7	204	2 728	2 293	500	2 086	1 501
R8	9	320	4 881	4 201	651	2 713	1 954
EX2	5	9 279	59 605	44 126	5 774	42 338	32 161
Összeg		12 640	89 037	65 775	15 125	88 012	64 362
Átlag		324	2 283	1 687	388	2 257	1 650

4. táblázat. A Newton-lépés bekapcsolásának vizsgálata az INTLAB alapú algoritmus esetén. A táblázatban Dim a feladat dimenzióját jelenti, HHSz a Hesse mátrix kiértékelések számát, MLH a maximális lista hosszát, valamint CPU a futási időt másodpercben.

Feladat	Dim	Eredeti feltétel			Új feltétel		
		HHSz	MLH	CPU	HHSz	MLH	CPU
S5	4	7	10	5.66	3	10	5.02
S7	4	6	14	7.27	3	14	7.00
S10	4	6	17	10.36	3	17	9.95
H3	3	11	16	5.09	3	13	2.69
H6	6	86	64	97.45	10	55	32.77
GP	2	0	153	9.25	56	175	16.63
SHCB	2	3	22	1.70	6	19	1.80
THCB	2	21	24	3.75	3	26	3.59
BR	2	18	10	3.44	18	12	4.91
RB	2	11	11	1.59	19	9	1.25
RB5	5	317	79	93.13	162	79	83.20
L3	2	8	57	10.06	2	53	6.22
L5	2	31	32	26.25	2	32	5.25
L8	3	5	9	2.34	2	9	2.72
L9	4	7	13	4.08	2	14	4.67
L10	5	8	15	5.95	2	17	7.13
L11	8	9	28	14.11	2	30	17.42
L12	10	11	36	23.89	2	39	27.03
L13	2	4	9	1.45	3	9	1.47
L14	3	7	12	3.16	3	12	3.08
L15	4	8	19	4.84	3	18	4.73
L16	5	6	20	5.56	3	20	6.03
L18	7	8	26	10.80	4	26	11.31
Schw2.1	2	53	25	12.50	17	31	11.36
Schw3.1	3	5	6	1.58	7	6	1.95
Schw2.5	2	27	4	2.13	5	7	1.13
Schw2.14	4	216	123	47.98	455	442	88.22
Schw2.18	2	1	4	0.16	2	11	0.64
Schw3.2	3	11	7	1.66	9	8	1.66
Schw3.7_5	5	24	32	7.13	13	32	10.52
Schw3.7_10	10	192	818	183.59	28	1 024	873.70
Griew5	5	7	28	5.94	1	28	7.95
Griew7	7	8	58	12.48	1	51	15.02
R4	2	6	36	2.23	6	24	1.44
R5	3	71	57	27.20	0	23	18.97
R6	5	100	30	71.72	0	25	59.06
R7	7	168	41	184.78	0	47	122.38
R8	9	270	59	429.48	0	65	204.88
EX2	5	3 802	388	4 390.09	4 284	145	3 182.41
Összeg		6 777	2 600	5 732	5 111	2 677	4 867
Átlag		174	67	147	132	69	125

Az általános szenzor lokalizálási feladat a következőképpen fogalmazható meg. Adott  $m$  darab szenzor csomópont ismert pozíciókkal:  $a_k \in \mathbb{R}^l$ ,  $k = 1, \dots, m$ , valamint  $n$  darab csomópont, ismeretlen pozíciókkal  $x_j \in \mathbb{R}^l$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Két tetszőleges csomópont esetén bevezetjük a következő euklideszi távolságokat:  $d_{kj} = \|a_k - x_j\|$ , egy ismert és egy ismeretlen pozíciójú csomópont esetén, valamint  $d_{ij} = \|x_i - x_j\|$ , két ismeretlen pozíciójú csomópont esetén, ahol  $j = 1, \dots, n$  és  $i \neq j$ .

Távolságalapú alkalmazásoknál a csomópontok jeleket bocsátanak ki, amelyek segítségével a szomszédos csomópontok képesek az egymás közötti távolságokat becsülni. Egy csomópont szomszédai azon csomópontok, amelyek az adott csomópont hatókörén belül vannak. Az összes rögzített és nem rögzített csomópontokra értelmezzük a következő halmazokat:

$$N_k = \{(k, j) : d_{kj} \leq r_k\}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$N_i = \{(i, j) : d_{ij} \leq r_i\}, \quad j = 1, \dots, n,$$

ahol az  $r_k$  és  $r_i$  paraméterek a maximális hatókörök sugarai.

A  $d_{kj}$  és  $d_{ij}$  valós távolságok helyett általában a csomópontok által mért  $\tilde{d}_{kj}$ ,  $\tilde{d}_{ij}$  zajos távolságokat szokták használni. Az utóbbiak a valós távolságoknak egy zajjal módosított változatai.

Tehát a lokalizálási feladat: adottak a  $\tilde{d}_{kj}$ ,  $\tilde{d}_{ij}$  zajos távolságok, és az ismert csomópontok koordinátái  $a_k \in \mathbb{R}^l$ ,  $k = 1, \dots, m$  felhasználásával határozzuk meg a többi csomópont  $x_j \in \mathbb{R}^l$ ,  $j = 1, \dots, n$  pozícióit. A feladat megfogalmazható szemidefinit programozásként [4], vagy nemlineáris optimalizálási feladatként [13]. Mi az utóbbi lehetőséget választottuk, amelyben a cél egy nemlineáris hibafüggvény minimalizálása:

$$\min_{\hat{x}} \left\{ \sum_{k=1}^m \sum_{j \in N_k} \left( \|a_k - \hat{x}_j\| - \tilde{d}_{kj} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} \left( \|\hat{x}_i - \hat{x}_j\| - \tilde{d}_{ij} \right)^2 \right\}, \quad (20)$$

ahol  $\hat{x}_i$ ,  $\hat{x}_j$  az  $i$  és  $j$  csomópontok becsült pozíciói,  $\tilde{d}_{kj}$  és  $\tilde{d}_{ij}$  a mért távolságok a  $(k, j)$  és  $(i, j)$  csomópont párok között és  $N_i$ ,  $N_k$  a szomszédos csomópont halmazok.

## 6.2. A feladat megoldása

A korábban megfogalmazott lokalizálási problémát számos sztochasztikus módszerrel sikerült közelítőleg megoldani. A leggyakrabban használt módszer a szimulált hűtés [1, 13, 17] és a genetikus algoritmus [23]. A (20) célfüggvénnyel megadott feladat egy globális optimalizálási feladat, amelyet mi intervallum aritmetikán alapuló módszerrel próbáltunk megoldani. A feladatban minden ismeretlen pozíciójú csomópont mindkét koordinátájához egy intervallum változót rendeltünk. A csomópontok a sík  $[0, 1] \times [0, 1]$  tartományában helyezkednek el, így az intervallum változók is ezen a tartományon belül változnak.

A (20) célfüggvény minimumának a megkeresése az INTLAB alapú optimalizálóval nagyon időigényes művelet, ezért egy közelítő megoldás megtalálására az ívmetszés [17, 21] technikáját alkalmazzuk használva az INTLAB alapú programot. Az ívmetszés lényege, hogy ha egy ismeretlen pozíciójú csomópontnak van három ismert helyzetű szomszédja, akkor az előbbi helyzete egyértelműen meghatározható, amennyiben ismertek a csomópontok közötti valós távolságok. Mivel a távolságok zajosak, ezért általában nem létezik egyértelmű megoldás, így azt a pontot keressük meg, amely minimalizálja az ismert helyzetű csomópontoktól vett távolságok összegét. A feladat megoldása során a csomópontokat két halmazba csoportosítjuk: az ismert és az ismeretlen helyzetű csomópontok halmazába. Minden ismeretlen helyzetű csomópont esetén meghatározzuk a szomszédait, majd az ívmetszés segítségével kiszámoljuk a pozícióját. A meghatározott helyzetű csomópontot áthelyezzük az ismert pozíciójú csomópontok halmazába és felhasználjuk más ismeretlen helyzetű csomópont helyzetének meghatározására. A mi esetünkben, ahol lehetséges, ott négy szomszédos csomópontot választunk a pontosabb meghatározás érdekében.

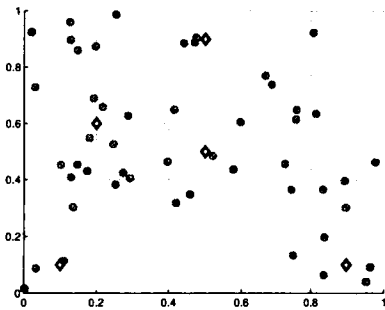
A lokalizálási feladat megoldása nagymértékben függ a különböző csomópontok számától, a rögzített szenzorok pozíciójától, a szomszédos csomópontok számától, a mért távolságok hibájától és a hatókörsugarától. Az általunk vizsgált feladatokban 5 ismert, valamint 50 ismeretlen pozíciójú csomópontot választottunk véletlenszerű elhelyezéssel a  $[0, 1] \times [0, 1]$  tartományban. Valamennyi csomópont esetén a hatókör sugara  $r = 0.3$ . A szimuláció elvégzésére szükség van a szomszédos csomópontok közötti mért távolságokra, amelyek hibáját normál eloszlás segítségével modellezzük. Hasonló eloszlást feltételeztek az [1, 17] cikkekben is. Tehát a mért távolságok és a valós távolságok közötti összefüggések:

$$\tilde{d}_{kj} = d_{kj}(1 + \text{randn}() \cdot nf),$$

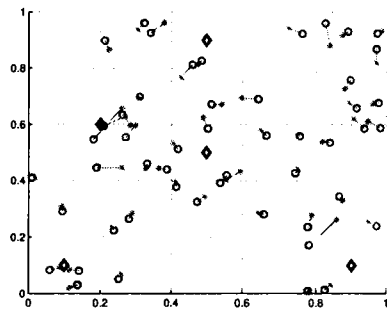
$$\tilde{d}_{ij} = d_{ij}(1 + \text{randn}() \cdot nf),$$

ahol  $\text{randn}()$  a normál eloszlás alapján generált szám,  $nf$  pedig a hiba faktor, amelynek értéke 10%.

Az előbbi beállítások mellett a lokalizálási feladatot az INTLAB alapú globális optimalizáló eljárás segítségével oldottuk meg. Az eredmény intervallumra  $10^{-3}$  pontosságot követeltünk meg, és ezen intervallum középpontját tekintettük a keresett szenzorok becsült pozíciójának. Abban az esetben, ha nincs zaj a mért távolságokban, a becsült pozíciók megegyeznek az eredeti pozíciókkal (lásd 1(a) ábra). Zajos távolságok esetén pedig a közelítő megoldások az 1(b) ábrán láthatók. Az algoritmus teljes futási ideje a zajos távolságok esetén 261 másodperc. Egy csomópont esetén az átlagos függvény-, gradiens-, illetve Hesse-mátrix kiértékelések száma rendre 194, 139 és 10. A maximális munkalista hossza 10 volt. Az ábrákon látható a csomópontok eredeti pozíciója (karika), a becsült pozíciók (csillag), az eredeti pozíció és a becsült pozíció közötti távolság (vonal), valamint az ismert pozíciójú csomópontok (négyyszög). A kapott közelítő megoldások javítását, valamint a feladat részletesebb tanulmányozását az X-CSC alapú intervallumos globális optimalizálóval tervezzük.



(a) Zaj nélküli távolságok



(b) Zajos távolságok

1. ábra. A szenzor lokalizációs feladat közelítő megoldása zaj nélküli és zajos távolságok esetén

## 7. Következtetések

A cikkben egy intervallumos globális optimalizáló algoritmus új implementációját mutattuk be, és teszteltük azt MATLAB/INTLAB környezetben. Az új programot összehasonlítottuk a hasonló C-XSC alapú eljárással. A teszt eredménye azt mutatta, hogy az új módszer hasonlóan hatékony, mint az előbbi – eltekintve a CPU időtől.

Megvizsgáltunk továbbá egy új feltételt a Newton-lépés bekapcsolására. Az eredmények alapján ez az új feltétel csökkenti a teljes szükséges számítási időt a régi megoldáshoz viszonyítva. Az INTLAB alapú algoritmus segítségével sikerült jó közelítő megoldást találni a szenzor lokalizálási problémára.

## 8. Köszönetnyilvánítás

Az elvégzett kutatást részben a Nemzeti Fejlesztési Ügynökség TÁMOP-4.2.2/08/1/2008-0008 és TÁMOP-4.2.1/B-09/1/KONV-2010-0005 pályázatai, valamint az MTA Határon Túli Magyar Tudományos Ösztöndíjprogramja támogatták.

## Hivatkozások

- [1] ANDERSON, B.D.O., MAO, G., AND FIDAN, B.: *Wireless sensor network localization techniques*. Computer Networks 51, (2007) 2529–2553.
- [2] BALOGH, J., CSENDES, T., AND STATEVA, R.P.: *Application of a stochastic method to the solution of the phase stability problem: cubic equations of state*. Fluid Phase Equilibria 212, (2003) 257–267.

- [3] BÁNHÉLYI, B., CSENDES, T., AND GARAY, B.M.: *Optimization and the Miranda approach in detecting horseshoe-type chaos by computer*. Int. J. Bifurcation and Chaos **17**, (2007) 735–747.
- [4] BISWAS, P. AND YE, Y.: *"Semidefinite programming for ad hoc wireless sensor network localization"*, in: Proceedings of the 3-rd International Symposium on Information Processing in Sensor Networks, Berkeley, CA, USA, ACM Press, New York, (2004) 46–54.
- [5] CASADO, L.G., GARCÍA, I., AND CSENDES, T.: *A heuristic rejection criterion in interval global optimization algorithms*. BIT **41**, (2001) 683–692.
- [6] CASADO, L.G., GARCÍA, I., CSENDES, T., AND RUIZ, V.G.: *Heuristic Rejection in Interval Global Optimization*. J. Optimization Theory and Applications **118**, (2003) 27–43.
- [7] CSENDES, T.: *New subinterval selection criteria for interval global optimization*. J. Global Optimization **19**, (2001) 307–327.
- [8] CSENDES, T.: *Numerical experiences with a new generalized subinterval selection criterion for interval global optimization*. Reliable Computing **9**, (2003) 109–125.
- [9] CSENDES, T., BÁNHÉLYI, B., AND HATVANI, L.: *Towards a computer-assisted proof for chaos in a forced damped pendulum equation*. J. Computational and Applied Mathematics **199**, (2007) 378–383.
- [10] CSENDES, T., GARAY, B.M., AND BÁNHÉLYI, B.: *A verified optimization technique to locate chaotic regions of Hénon systems*. J. of Global Optimization **35**, (2006) 145–160.
- [11] CSENDES, T., PÁL, L., SENDÍN, J.O.H., AND BANGA, J.R.: *The GLOBAL Optimization Method Revisited*. Optimization Letters **2**, (2008) 445–454.
- [12] HAMMER, R., HOCKS, M., KULISCH, U., AND RATZ, D.: *Numerical Toolbox for Verified Computing I*. (Springer-Verlag, Berlin, 1993).
- [13] KANNAN, A.A., MAO, G., AND VUCETIC, B.: *Simulated Annealing based Wireless Sensor Network Localization*, Journal of Computers **1**, (2006) 15–22.
- [14] KEARFOTT, R.B.: *Rigorous global search: continuous problems* (Kluwer, Dordrecht, 1996).
- [15] MARKÓT, M.C. AND CSENDES, T.: *A new verified optimization technique for the "packing circles in a unit square" problems*. SIAM J. on Optimization **16**, (2005) 193–219.
- [16] MARKÓT, M.C., FERNÁNDEZ, J., CASADO, L.G., AND CSENDES, T.: *New interval methods for constrained global optimization*. Mathematical Programming **106**, (2006) 287–318.
- [17] NIEWIADOMSKA-SZYNKIEWICZ, E. AND MARKS, M.: *Optimization Schemes For Wireless Sensor Network Localization*. International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, **19**, (2009) 291–302.
- [18] PÁL, L. AND CSENDES, T.: *INTLAB implementation of an interval global optimization algorithm*. Optimization Methods and Software **24**, (2009) 749–759.
- [19] RUMP, S.M.: *INTLAB – Interval Laboratory*. In: T. Csentes (ed.): Developments in Reliable Computing, Kluwer, Dordrecht, (1999) 77–104.
- [20] SZABÓ, P.G., MARKÓT, M.C., CSENDES, T., SPECHT, E., CASADO, L.G., AND GARCÍA, I.: *New Approaches to Circle Packing in a Square – With Program Codes* (Springer-Verlag, Berlin, 2007).



- [21] TAKÁCS, G.: *Helymeghatározás mobiltelefonnal és mobil hálózattal*. Híradástechnika **8**, (2008) 20–27.
- [22] TÓTH, B., FERNÁNDEZ, J., AND CSENDES, T.: *Empirical convergence speed of inclusion functions for facility location problems*. J. of Computational and Applied Mathematics **199**, (2007) 384–389.
- [23] ZHANG, Q., WANG, J., JIN, C., YE, J., MA, C., AND ZHANG, W.: *"Genetic Algorithm Based Wireless Sensor Network Localization"*, in: Proceedings of the 2008 Fourth International Conference on Natural Computation, (2008) 608–613.

(Beérkezett: 2010. május 28.)

PÁL LÁSZLÓ

Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem  
Gazdaság- és Humántudományok Kar  
530104, Csíkszereda, Szabadság tér 1, Románia  
e-mail: pallaszlo@sapientia.siculorum.ro

CSENDES TIBOR

Szegedi Tudományegyetem  
Informatikai Intézet  
6720 Szeged, Árpád tér 2.  
e-mail: csendes@inf.u-szeged.hu

# AN INTLAB BASED GLOBAL OPTIMIZATION METHOD AND IT'S APPLICATION TO A SENSOR NETWORK LOCALIZATION PROBLEM

LÁSZLÓ PÁL AND TIBOR CSENDES

In this paper, we describe a new implementation of an interval optimization algorithm. The algorithm implemented in MATLAB that uses the INTLAB package supporting interval calculations and automatic differentiation solves the bound constrained global optimization problem. According to the numerical studies completed, the new, INTLAB based implementation is closely as efficient as its C-XSC-based basis algorithm – with the exception of the CPU time needed. It can be installed and used easily compared with other similar programs. Furthermore, we examined a new condition for applying the Newton step and we described a sensor network localization problem solved by the INTLAB based algorithm.



## ELJÁRÁS JÓ MINŐSÉGŰ VÉLETLEN EGÉSZ VEKTOROK GENERÁLÁSÁRA

TAKÁCS SZABOLCS

Alkalmazások során szükségünk lehet véletlen egész vektorok generálására, amelyek minőségét több szempont alapján is értékelhetjük.

Számunkra elsődlegesen az volt fontos, hogy a vektorok eloszlásának egyenletességét biztosítani tudjuk, továbbá a közöttük lévő nyilvánvalóan meglévő összefüggőség a lehető legkisebb mértékben legyen kimutatható. Természetesen az általánosan elfogadott informatikai feltételeknek is megpróbáltunk eleget tenni.

A felsorolt szempontokra több tesztet is alkalmaztunk. Összehasonlításként a MATLAB<sup>®</sup> véletlen egész vektorokat generáló rutinját használtuk, annak eredményeivel vetettük össze a saját generátorunk eredményeit.

A teszteket előre kiválasztottuk, nem az algoritmus eredményeinek függvényében döntöttünk használatuk mellett, azonban az eredmények ismeretében hajtottunk végre változtatásokat az eredeti algoritmuson – elérve így egy jobb eredményeket mutató verziót.

### 1. Mi a véletlen?

A véletlent definiálni - gyakorlati kritériumok alapján, mint az majd látható is lesz, nem könnyű feladat. Egzakt matematikai definíciók sokaságát lehet megtenni, melyek többé-kevésbé ekvivalensek egymással, azonban teljesen nyilvánvaló módon vannak eltérések. Vannak sorozatok, melyek az egyik definíció szerint véletlenszerűnek tekinthetők, míg más definíciók szerint már nem „eléggé” véletlenek.

[3] egzaktul megfogalmaz néhány lehetséges definíciót. Milyen problémákat, illetve lehetőségeket biztosítanak számunkra ezek a definíciók, illetve milyen kapcsolat van a különböző definíciókat teljesítő sorozatok között? Van-e olyan sorozat, mely minden definíció szerint véletlen?

Tekintsünk két régebbi definíciót, melyek nélkülözik a teljes matematikai precizitást, azonban a probléma lényegére jól rávilágítanak.

**1.1. Definíció.** (Lehmer, 1951) A véletlen sorozat bizonytalan fogalmán olyan sorozatot értsünk, melynek későbbi elemeit az avatatlan személy nem tudja megjósolni; továbbá jól vizsgáljuk néhány szokásos statisztikai próbán; ezeknek a próbáknak a megválasztása függ attól is, hogy mire szeretnénk használni a sorozatot.

**1.2. Definíció.** (Franklin, 1962) Egy  $U_1, \dots, U_n$ ,  $U_i \in [0, 1)$  sorozat véletlen, ha rendelkezik minden olyan tulajdonsággal, amely az egyenletes eloszlású véletlen változókból álló független minták végtelen sorozatainak közös tulajdonsága.

Megállapítható, hogy Franklin definíciója lényegében Lehmer definíciójának pontosítása, azonban ez alapján a sorozatnak **minden** statisztikai próbát ki kell állnia. Definícióink nem elég pontosak – és [3] eszmefuttatása és tételei alapján, ez utóbbi definíciót szigorúan véve megállapíthatjuk, hogy véletlen sorozat nem létezik.

Ezért általában Lehmer kicsit liberálisabb definíciója alapján érdemes elindulni és dolgozni.

A fenti megállapítás, miszerint nincsen olyan véletlen sorozat, mely minden tesztet kielégítene, a következő egyszerű gondolatmenettel értelmezhető legkönnyebben.

Válasszunk egy olyan véletlen sorozatot, melyben csak 0, vagy 1 értékek szerepelhetnek. Egy 1000 hosszú sorozatban is, sok ismétlést kérve, kell lennie olyan esetnek, melyben egymás után 1000 darab 0 szerepel.

Ez a fajta lokális nem-véletlenszerűség a számítógépes alkalmazások számára katasztrofális helyzetet eredményezne – amit persze az alkalmazások stabilitása érdekében kénytelenek vagyunk kiszűrni. Holott egy igazi véletlen számsorozattól a lokális nem-véletlenszerű viselkedés elvárható.

Ebből következik [3] szerint az a tény, mely alapján el kell, hogy fogadjuk:

**Megjegyzés.** Nem létezik olyan véletlenszám sorozat, amely minden alkalmazáshoz tökéletesen megfelelő lenne.

## 2. Elvárások

Jóminőségű pseudo-véletlen számokat, vagy vektorokat generálni nem könnyű, hiszen számos minőségbiztosítási szempontnak kell eleget tenni. [3] szerint nem létezik olyan pseudo-véletlen számokat, vagy vektorokat generáló algoritmus, melyhez ne lehetne olyan tesztet előírni, amelyen fennakad. Egészen pontosan, ennek vizsgálatához olykor azt is nehézkes definiálni, hogy mit tekintünk véletlen sorozatnak.

[3] több, egymással nem feltétlenül ekvivalens definíciót is felsorol. Vizsgálja annak fényében, hogy milyen matematikai tulajdonságaik – és milyen algoritmikus tulajdonságaik vannak az őket kielégítő sorozatoknak.

Vannak azonban általánosan elfogadott elvárások egy algoritmussal szemben ([6], [2]), melyeket illik teljesíteni. Ezek az alábbiakban foglalhatóak össze:

### 1. Gyorsaság

Az alkalmazott algoritmusunknak nem szabad túl lassan generálnia a számokat, vektorokat, hiszen ezek általában nagyobb programok részeként

alkalmazandók, így elvárható, hogy az alkalmazások sebessége ne egy véletlen szám meghatározásának sebességétől függjön.

## 2. Egyszerűség

Minél könnyebben, egyszerűbben implementálható egy algoritmus, annál könnyebb lesz a felhasználhatósága. Világos, hogy egy túlbonyolított algoritmus – bár viselkedését tekintve tűnhet kaotikusabbnak – alapvetően, alkalmazási szempontból lehet mégis rosszabb, mint egy egyszerű, szintén „eléggye kaotikus” verzió.

## 3. Szabadság

Az algoritmusunk akkor lesz megfelelő, ha az számítógépes rendszertől függetlenül alkalmazható, azaz pl. az operációs rendszer vagy a használt gép nem akadályoz minket a felhasználhatóságában.

## 4. Megismételhetőség

Nagyon fontos szempont, hogy bár alapvetően véletlennek tűnő számokat, vektorokat szeretnénk előállítani a megadott paraméterek alapján (hiszen algoritmizálunk), azonos paraméterbeállítások mellett (azaz azonos feltételek biztosításával) a program determinisztikussága megmaradjon.

## 5. Ciklushossz

A pszeudo-véletlen algoritmusok egyik nagy hátránya szokott lenni, hogy a ciklushossz (azaz, hány előállított szám után ismétlődik már a számok sorozata) túl rövid.

## 6. Statisztikai próbák

A fenti, alapvetően strukturális, informatikai feltételeket (első 4 pont), illetve az 5., matematikai feltételt egy hatodik feltétel teljesítése teszi teljesebbé: nevezetesen, hogy előre meghatározott, az algoritmus viselkedését vizsgáló statisztikai teszteken is meg kell felelnie a programnak.

Ezeket az olykor nehezen ellenőrizhető kritériumokat statisztikai próbák segítségével fogjuk vizsgálni. Megnézzük, hogy az alkalmazott algoritmusunk mennyire ad hasonló eredményeket ahhoz, mintha egy valóban véletlen (pl. rulett-kerékről) származó számsorozattal dolgoznánk.

Teszteléseink során ezeket a fenti szempontokat vettük alapul. Az első 4 szempont ellenőrzése alapvetően egyszerű volt – ezekre fogunk először kitérni.

Az 5. szempont vizsgálata némiképpen eltérő lesz, erről majd a későbbiekben még lesz szó.

A 6., statisztikai próbák szempontjához előre meghatároztuk, hogy mely teszteket fogjuk alkalmazni – elkerülve így azt a csábítást, hogy az algoritmus vizsgálta során, annak megismerése után olyan teszteket válogassunk ki, melyeknek megfelel az algoritmus. A módosítások az eredeti algoritmuson mind azt a célt szolgálták,

hogy az előre meghatározott teszteken, kontrolált körülmények között tudjunk jól teljesíteni.

Az egyenletesség tesztelésére a  $\chi^2$ -próba különböző, strukturált változatait és a Kolmogorov–Szmirnov-tesztet alkalmaztuk.

Az összefüggések feltárására szintén  $\chi^2$ -próbát és monotonitási együtthatókat (Kendall-gamma) alkalmaztunk, illetve a Knuth által javasolt sorozatesztet, valamint annak egy átrendezés-tesztnek nevezett módosítását.

Az eredeti algoritmus forrása [6], és ugyancsak ismerteti [5], a rá vonatkozó minőséghez kapcsolódó bizonyításokkal egyetemben. Az eredeti algoritmust azonban több ponton is módosítottuk, illetve specifikáltuk – ezen módosítások, specifikációk hatását teszteltük különböző minőségbiztosítási eljárások segítségével.

A teszteléshez használt eljárásokat részint [3], részint [4] javaslatai alapján készítettük el.

### 3. Az eredeti algoritmus leírása

Az algoritmus egész vektorokat vesz egy véges, rögzített halmazból, majd e véletlenszerűen kiválasztott vektorokat adja össze, és az eredményt visszatranszformálja egy adott élhosszúságú kockába (általános esetben tetszőleges tartományba). Lépéseit a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

#### 1. Inicializálás

$$A \in \mathbb{Z}_+^{n \times m}, \quad n < m, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+ \\ \xi_j \sim U(m) \in \mathbb{Z}_+, \quad j \in [1, \dots, K] \quad D \in \mathbb{Z}_+^n, \quad K \in \mathbb{Z}_+,$$

ahol:

- $A$  mátrix összes  $n \times n$ -es részmátrixának determinánsaira teljesül, hogy a legnagyobb közös osztójuk 1.
- $\xi_j$  véletlen, egyenletes eloszlású valószínűségi változók.
- $D$  a pozitív ortáns adott  $d$  élhosszúságú kockája (természetesen itt bármilyen tartomány választható).
- $K$  számú véletlen egész vektort szeretnénk generálni.

Azaz egy  $D$  tartomány – jelen leírásban a  $d$  élhosszúságú, pozitív ortánsban elhelyezkedő  $n$  dimenziós kocka egész rácpontjaira szeretnénk véletlen vektorokat generálni.

## 2. Ciklus és levágás

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 0, \\ \nu &:= \xi, \\ \mu_i &= \mu_{i-1} + a_\nu, \\ i &= 1 \dots K.\end{aligned}$$

Ha  $\mu_{i,j} > d$  (vagy  $\mu_{i,j} < 1$ ) akkor  $\mu_{i,j} := \mu_{i,j}^*$ , ahol

$$\begin{aligned}\mu_{i,j} &\equiv \mu_{i,j}^* \pmod{d}, & 1 \leq \mu_{i,j}^* \leq d, \\ j &= 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Azaz a 0 vektorból indulva az  $A$  mátrix oszlopainak véletlen sorrendben – egyenletes eloszlású valószínűségi változók realizációinak segítségével – történő egységnyi együtthatójú lineáris kombinációját vesszük, ezek adják a véletlen vektorokat.

Az algoritmus megtalálható [5] alatt, ahol a levágást – ha túllépnénk a kockán (vagy az adott tartományon) az algoritmus egy maradékos osztással oldja meg, mely az adott koordinátán visszaterel minket a tartomány belsejébe.

**3.1. TÉTEL.** Amennyiben az  $\{a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{Z}^n$  vektorrendszer tartalmazza az  $\mathbb{R}^n$  egy lineáris bázisát, a determinánsokra vonatkozó feltétel fennáll és  $\exists t \in [1, m] : a_t = 0$ , úgy:

$$\forall u \in D : \lim_{k \rightarrow \infty} P(\mu_k = u) = \frac{1}{\prod_{j=1}^n d_j} = d^{-n},$$

azaz minden  $u$  rácspont egyenlő valószínűséggel vétetik fel, amennyiben a generált vektorok száma a végtelenhez tart [6].

*Megjegyzés.* A tételben szereplő  $d_j$  értékek most egyenlőek, hiszen a  $d$  élhosszúságú kocka rácspontjaira generálunk. Általában egy  $D = (d_1, \dots, d_n)$ , pozitív egész élhosszak által meghatározott téglába állítjuk elő a vektorokat.

*Bizonyítás.* A tétel bizonyítása [6] cikkben megtalálható. □

**3.1. KÖVETKEZMÉNY.** A tételből következik az is, hogy ha a  $D$  tartomány akkora, melyben a rácspontok száma meghaladja az alkalmazott véletlenszám generátor ciklushosszának mértékét, úgy az így megalkotott algoritmusunk ciklushossza meghaladja az eredeti véletlenszámgenerátor ciklushosszát, hiszen pozitív (sőt, határértékben egyenlő) valószínűséggel minden rácspontot előállít az algoritmusunk.

#### 4. Az algoritmus fejlesztése, javítása

*Megjegyzés.* Az általunk alkalmazott algoritmusban seed beállítás is szerepelt, ami azt jelenti, hogy amennyiben  $K$  vektorra volt szükségünk, úgy a generált  $\mu$  vektorokat csak egy bizonyos érték után kezdtük el egy mátrixba feltölteni (a seed érték eléréséig szabadon generált a program, nem történ kiíratás). Ez random-seedet eredményezett számunkra, hiszen így az adott  $D$  tartomány egy pszeudo-véletlen pontjából indítottuk el az algoritmust.

*Megjegyzés.* Az eredeti algoritmus leírásában látszik, hogy egyetlen pont van, ahol döntési lehetőségünk van: az  $A$  mátrixunk megválasztása. Az algoritmushoz olyan  $A$  mátrixra van szükségünk, melyre igaz, hogy az  $n \times n$ -es aldeteterminánsok legnagyobb közös osztója 1.

Amennyiben ez nem teljesül, úgy az algoritmus során sávokat generálnánk, nem tudnánk kitölteni az egész, kitöltendő  $D$  tartományt.

**4.1. VÁLTOZAT.** Az  $A$  mátrixot első körben az alábbi technikával generáltuk: egy  $n \times n$ -es egységmátrixon végrehajtottunk adott számú ( $n^2$ ) Gauss-eliminációs eljárást fordított irányban (ezzel elértük, hogy a kapott mátrix determinánsa továbbra is 1 maradjon). A fordított irány azt jelentette, hogy most az egységmátrix sorainak véletlen számszorosát hozzáadtuk / kivontuk egymásból.

Ezt az eljárást alkalmaztuk egymást után többször. Így garantáltuk, hogy minden  $n \times n$ -es aldetetermináns legnagyobb közös osztója 1 maradt, hiszen tartalmazott több olyan részmátrixot is, melynek determinánsa 1.

Fontos azt is megemlíteni, hogy az algoritmus mindenképpen használ egy külső, véletlen szám generátort, mellyel egyenletes eloszlásból származó pszeudo-véletlen számokat nyerünk a vektorok összegeinek előállításához, illetve ezt a generátort használjuk az  $A$  mátrix előállításához is.

Az algoritmus teszteléséhez különböző statisztikai eljárásokat alkalmaztunk. Egyik oldalról fontos szempont volt az eloszlás egyenletességének tesztelése. Erre részint  $\chi^2$ -próbát, részint Kolmogorov–Szmirnov-tesztet választottuk.

Az egyenletességet vizsgáló teszteket a 100 oldalhosszúságú, pozitív ortánsban elhelyezkedő, 2, 3 és 5 dimenziós kockába történő, 2000 vektor generálására végeztük el.

A vektoraink függetlenségének tesztelésére a későbbiekben bemutatásra kerülő teszteket használtuk. Szintén a 100 oldalhosszúságú, pozitív ortánsban elhelyezkedő kockába generált véletlen egész vektorokkal dolgoztunk, azonban a megbízhatóság érdekében 5000 vektort generáltunk (a [3] szakirodalomban a minimális 4000-es érték szerepel).

##### 4.1. Módosítás az algoritmuson

Kétfajta módosítást hajtottunk végre az algoritmuson. Az egyik az  $A$  mátrix generálása, a másik pedig egy ritkítás beállítása.



## Generálás

Az algoritmus lelkét képező  $A$  mátrix megválasztása fontos lépés. A módosításban az alábbi lépéseket tettük.

1. Először a már ismertetett módon végrehajtottuk az  $A$  mátrix generálását, majd annak segítségével generáltunk egy megfelelően hosszú (2000 darabos) véletlen vektorrendszert, amit egy  $M$  mátrixba rendeztünk.
2. Az  $A$  mátrix elejéről megtartottuk a Gauss-elimináció segítségével generált  $n \times n$ -es részt, így már garantálni tudtuk, hogy a determinánsok relatív prímek legyenek. Ezután az  $M$  mátrixból választottunk egy megfelelő nagyságú szeletet, azaz: az  $A$  mátrixba már előzetesen legenerált, ebből az eljárásból származó pszeudó-véletlen vektorok kerültek. (Ezzel azt szeretnénk volna elérni, hogy az algoritmus lényegében a környezettől független legyen – ne teljes egészében a MATLAB<sup>©</sup> generátorával dolgozzunk.)

## Ritkítás

Már említettük, hogy beállítható ritkítás is az algoritmusban. Most a már említett seed mellett még ezt is alkalmaztunk. Így egy jóval nagyobb vektorrendszert alkalmaztunk – nevezetesen 2, 4, 8, 16-szoros ritkítással dolgoztunk és teszteltünk.

*Megjegyzés.* Nem alkalmaztunk ennél nagyobb ritkítást, mert bár teszteltük, de nem hozott érdemi javulást, vagy romlást a 16-szoroshoz képest, viszont nagyban megnövelte a futásidőt.

A ritkítással mérhetően nem javultak az eredményeink az egyenletesség tekintetében, azonban az összefüggőség esetén már mást tapasztaltunk.

Az első teszt, amit alkalmaztunk a nagy elemszámról való tekintettel a Kolmogorov-Szmirnov-próba volt. Ennek során először a peremeloszlásokat teszteltük, majd minden perem esetén azokat 2, 4 és 5 részre bontottuk, és ezen vágások mentén kialakult téglákban vizsgáltuk a többi koordináta egyenletességét.

A második teszt – ugyanezen téglák kombinációján – annak tesztelése volt, hogy minden téglában egyenletesen vannak-e jelen a generált rácpontok. Ez persze  $2^n$ , illetve  $4^n$ ,  $5^n$  téglát jelentett, melyekre  $\chi^2$ -próbát alkalmaztunk.

*Megjegyzés.* Ezen a ponton nyer jelentőséget az a tény, hogy a szigorú pozitív kvadránsba generáltunk vektorokat, ugyanis így valóban értelmes osztópontokat hozhattunk létre – nem 50 – 51 pont került az egyes vágásokba, hanem 50 – 50, vagy 25 – 25 – 25 – 25 stb.

A Kolmogorov-Szmirnov-tesztek közül az egyváltozós esetek előfeltétele, hogy folytonos  $F$ -eloszlást vizsgálunk. Ismert, hogy a kétváltozós esetnek is az a feltétele, hogy mindkét valószínűségi változó egy-egy folytonos  $F$ -, és  $G$ -eloszlásból származzon, majd ezen  $F$ -, és  $G$ -eloszlásokat vizsgáljuk egyenlőség szempontjából.

A Kolmogorov–Szmirnov-tesztek kétváltozós esetében a véletlen egész vektorokat úgy kezeljük, mint ha folytonos eloszlásból származnának. (Például IQ-tesztek esetén is úgy feltételezzük, hogy folytonos eloszlás húzódik meg a háttérben, csak a mérőeszközünk nem tudja ezt mérni).

Így az alábbi eljárást fogjuk elvégezni.

1. Generálunk egy  $V$   $n \times m$ -es vektorrendszert, azaz  $m$  darab  $n$  dimenziós vektort. Azt vizsgáljuk, hogy az  $m$  darab vektor minden egyes peremeloszlása egyenletes-e.

Válasszuk ki például  $V$  első oszlopát (ami most így egy  $m$  hosszú vektor lett) tesztelésre, jelölje ezt  $V_1$ .

Legyen  $Max$  és  $Min$   $V_1$  maximális és minimális eleme.

2. Vesszünk egy  $w$  vektort, mely  $Max$  és  $Min$  között minden egész értéket felvesz, ráadásul mindet egyenlő mértékben. Ez azt jelenti, hogy minden értékből

$$\left\lfloor \frac{n}{Max - Min + 1} \right\rfloor$$

darabot veszünk.

Ezzel elérjük, hogy a  $V_1$  vektorral majdnem megegyező hosszúságú, annak legnagyobb és legkisebb eleme között egyenletes eloszlásból származó  $w$  vektorunk legyen.

3. Most  $w$  és  $V_1$  eloszlását a fent nevezett illeszkedés-vizsgáló eszközökkel összehasonlítjuk. Így azt feltételezhetjük, hogy mindkettő ugyanazon mérőeszkővel készült, egyenletes eloszlásból származó minta – továbbá, a tesztnek az elemszámok nagyon eltérő volta miatti gyengülését mindenképpen kizárjuk, hiszen majdnem megegyező méretű vektorokat hasonlítottunk össze.

## 4.2. Összefüggőség tesztelése

### 4.2.1. A Kendall-gamma monotonitási együttható

Tegyük fel, hogy adott  $A = (X_1, Y_1)$  és  $B = (X_2, Y_2)$  pontpár.

Amennyiben  $X_1 > X_2$  és  $Y_1 > Y_2$ , úgy azt mondjuk, hogy  $A$  és  $B$  konkordáns viszonyban vannak egymással (pozitív irányú az összefüggés, monoton növekvő kapcsolat van közöttük).

Amennyiben  $X_1 > X_2$ , de  $Y_1 < Y_2$ , úgy azt mondjuk, hogy  $A$  és  $B$  diszkordáns viszonyban vannak egymással (negatív irányú az összefüggés közöttük, monoton csökkenő kapcsolatot mérünk).

Világos, hogy ha egy pontthalmazban a konkordáns párok  $p_+$  száma a nagyobb, úgy azt mondhatjuk, hogy a pontthalmaz összességében monoton növekvő, a pontok egymáshoz képest monoton növekednek. Amennyiben a diszkordáns párok

$p_-$  száma a nagyobb, úgy ennek ellenkezőjét állíthatjuk – azaz monoton csökkenő viszonyt vélelmezhetünk a pontthalmazunk esetén. Tehát

$$p_+ = \# \{ (A(X_1, Y_1), B(X_2, Y_2)) \mid (X_1 < X_2) \wedge (Y_1 < Y_2) \},$$

$$p_- = \# \{ (A(X_1, Y_1), B(X_2, Y_2)) \mid (X_1 < X_2) \wedge (Y_1 > Y_2) \}.$$

Az is világos, hogy nem minden pontpárt tudunk összehasonlítani – hiszen lehetnek egyező  $X$  vagy  $Y$  koordináták. Erre az esetre olyan korrekciót hajtunk végre, hogy  $p_+$  és  $p_-$  számok különbségét nem az összes létező pároshoz viszonyítjuk, hanem az összehasonlítható párokra. Az így képezett monotonitási együtt-ható:

$$\gamma = \frac{p_+ - p_-}{p_+ + p_-}.$$

*Megjegyzés.* Technikai kérdés, hogy a pontpárok összehasonlítását miként végezzük. Ha sorban haladva a már összehasonlítottakat kihagyjuk, vagy rosszabb szervezés miatt minden pontot minden ponttal akár többször is összehasonlítunk – az arányokon, illetve azok hányadosán ez a részlet nem fog változtatni.

Jackknife módszer segítségével mérjük az így elkészített monotonitási együtt-hatók 95%-os konfidencia-intervallumát. Ezt úgy tesszük, hogy a generált vektorok közül mindig kihagyva a megfelelőt, pszeudo-statisztikákat nyerünk a fenti monotonitási mértékre, majd utána trimmelés segítségével (adott számú legnagyobb és legkisebb elem elhagyásával) meghatározzuk a kívánt szélességű intervallumot.

*Megjegyzés.* A jackknife eljárásról bővebben [1] alatt olvashatunk. A trimmelés során nem teszünk mást, mint a nagyság szerint sorbarendezett elemek első és utolsó darabjaitól (egy előre meghatározott arányban, szimmetrikusan) megszabadulunk.

Amennyiben ez az intervallum a pontthalmazunk esetén tartalmazza a 0 értéket, úgy azt mondhatjuk, hogy a pontthalmazunk lényegében azonos arányban tartalmaz monoton növekedő és csökkenő pontpárosokat.

#### 4.2.2. Átrendezés- és sorozatteszt

[3] alapján a sorozattesztet, illetve annak átdolgozását alkalmaztuk.

##### 1. Átrendezésteszt

Az eljárásunkat abból a szempontból vizsgáljuk, hogy a monoton növekvő és csökkenő részsorozatok tulajdonságai átrendezés hatására megváltoznak-e. Ugyanis, ha az átrendezés változtat az eredményeken az azt jelenti, hogy menet közben valamit kihasználtunk, vagy elvesztettünk, és ennek hatása van a sorozatunk viselkedésére.

Az átrendezést az alábbi módon értjük: tekintsük az adott, generált  $V$  vektorrendszerünket. A  $V$  vektorrendszert egy permutáció segítségével rendezzük át, a permutáció által adott sorrendben felsorolva újra a vektorokat, legyen ez  $V^*$ . Amennyiben a monoton növekvő és csökkenő részsorozatok aránya, száma  $V$  és  $V^*$  esetén szignifikánsan eltérő, úgy azt mondhatjuk, hogy az eredeti sorozatunkban jelentősége volt a vektorok sorrendjének, az nem egészen volt véletlenszerű.

## 2. Sorozatteszt

A sorozatteszt [3] alatt megtalálható, melynek lényege, hogy a véletlen számok generálásakor vizsgálható, hogy hány monoton növekvő és csökkenő részsorozatot generál az algoritmus. Ezek természetesen nem függetlenek egymástól (így pl. az esetszám tesztelésére egyszerű  $\chi^2$ -próba nem alkalmazható). A függetlenség azért sérül, mert teljesen nyilvánvaló módon egy növekvő sorozatot mindenképpen egy csökkenő kell, hogy kövessen.

Lényegében annyi történik, hogy összeszámoljuk: a generált vektorrendszerünkön lexikografikus rendezés után hány darab, milyen hosszú monoton növekvő részsorozat keletkezett. Ezeket utána a fenti [3] hivatkozáson megadott módon statisztikai vizsgálatnak vetjük alá.

## 5. Informatikai és algoritmus-szervezési szempontok

Az alkalmazott statisztikai eljárásokat majd azután ismertetjük, hogy az alapvető informatikai elvárások teljesüléséről meggyőződünk.

Az elején felsorolt szempontok tehát, melyeket ellenőriznünk kell a következők:

### 1. Gyorsaság

Az algoritmus a MATLAB<sup>®</sup> véletlen generátorával lényegében egyező idő alatt futott, amennyiben nem kértünk túlzott mérvű ritkítást. Világos, hogy egy 20-30-szoros ritkítás 20-30-szor annyi vektor generálását jelenti, amelyek közül csak minden 20. vagy 30. kerül felhasználásra. Így a ritkítás pl. 5000 vektor generálása során már mérhető idővesztéseket okoz.

### 2. Egyszerűség

Az algoritmus leírásán látszik, hogy annak struktúrája nem túl bonyolult – bár használ egy szubrutint, nevezetesen: mindenképpen alkalmaznunk kell egy külső véletlenszám generátort az algoritmus beindításához, illetve köztes működtetéséhez (minden olyan esetben, amikor szükségünk van egy véletlen számra). Ez feltétlenül bonyolultabbá teszi az algoritmust pl. annál az algoritmusnál, melyet szubrutinként meghívunk.

### 3. Szabadság

A számítógépes rendszertől annyiban független csak, hogy olyan számítógépes felület kell az algoritmus számára, mely már rendelkezik az előző pontban is említett szubrutinnal. Azonban ettől a ponttól valóban bármely rendszeren alkalmazható.

### 4. Megismételhetőség

Amennyiben az alkalmazott szubrutin paramétereit ismerjük, úgy a többi paraméter fixálása után nyilván az eljárás ugyanannyira lesz reprodukálható, mint amennyire a szubrutinként alkalmazott véletlenszám generátorunk az volt.

### 5. Hosszú ciklusidő

A MATLAB<sup>®</sup> ciklusideje kellően hosszú, és az algoritmus leírásából látható, hogy szubrutinként ezt az eljárást használó algoritmusunk ciklusideje részben ehhez kötött – bár ennél akár hosszabb is lehet, amennyiben a generálásban meghatározott tartomány rácpontjainak számosságát növeljük.

### 6. Statisztikai próbák

Ennek ismertetése a következő fejezetben történik.

*Megjegyzés.* Az informatikai kritériumokat lényegében teljesítettük – bár az algoritmus egyszerűsége garancia volt arra nézve, hogy az első négy ponttal nem lehet problémánk.

Az 5-ös pont teljesítése részint a szubrutinként alkalmazott, külső generátoron múlik, tehát amennyiben ez megfelelően lett megválasztva, úgy a mi algoritmusunk is jól fog viselkedni. Másik oldalról [6] alapján a  $D$  tartomány rácpontjainak számától is erőteljesen függ a ciklushossz.

A statisztikai próbák teljesítése alapvetően nem a szubrutinon múlik, hanem az  $A$  mátrix megválasztásán.

## 6. Az algoritmussal elért eredményeink a különböző statisztikai teszteken

A vizsgált algoritmust a MATLAB<sup>®</sup> véletlen egészeket generáló rutinjával hasonlítottuk össze.

### 6.1. Kolmogorov–Szmirnov-statisztika alkalmazása

A tesztek eredményeinek ismertetése előtt emlékeztetünk rá, hogy 2000 vektort generáltunk a szigorúan a pozitív ortánsban elhelyezkedő, 100-as oldalhosszúságú, adott dimenziós kockába.

*Megjegyzés.* Bár 100 futás történt, a táblázatokban tört értékek szerepelhetnek. Ugyanis 100 futás esetén, adott dimenzió és adott törés (kocka éleinek felosztása) miatt 100-nál természetesen több statisztikai próba készült.

Például 3 dimenzióban, 4 törés esetén (minden élen 4 részre bontunk)  $4 * 3 * 2$  darab kocka keletkezik, tehát ennyi darab kisebb tartományban tesz-teljük a generált vektorok egyenletességét. (Általánosságban – ha van törés –  $\dim * (\dim - 1) * \text{törés}$ .) Azaz, e fenti példa esetén ez  $24 * 100 = 2400$  tesztet jelent.

Az alkalmazott statisztika feltételei az alábbi módon írhatóak le.

Adott  $X_i$  koordinátát szeletekre bontjuk, nevezetesen az alábbi átkódolásokat, töréseket vezetjük be.

$$T_{i,2} = \begin{cases} 1, & X_i \in [1, 50]; \\ 2, & X_i \in [51, 100]. \end{cases}$$

$$T_{i,4} = \begin{cases} 1, & X_i \in [1, 25]; \\ 2, & X_i \in [26, 50]; \\ 3, & X_i \in [51, 75]; \\ 4, & X_i \in [76, 100]. \end{cases}$$

$$T_{i,5} = \begin{cases} 1, & X_i \in [1, 20]; \\ 2, & X_i \in [21, 40]; \\ 3, & X_i \in [41, 60]; \\ 4, & X_i \in [61, 80]; \\ 5, & X_i \in [81, 100]. \end{cases}$$

A Kolmogorov–Szmirnov-statisztikát az egyenletesség tesztelésére alkalmazzuk  $\forall j \neq i$ ,  $X_j$  koordinátára, minden lehetséges  $T_{i,k}$  mentén, ahol  $k \in \{2, 4, 5\}$ . Azaz,  $KS(T_{i,k}, X_j)$ , ahol  $1 \leq i, j \leq \dim$ ,  $i \neq j$  és  $k \in \{2, 4, 5\}$ . A Kolmogorov–Szmirnov-statisztika első koordinátáján a bontásban résztvevő koordináta szerepel, míg a második koordináta mutatja, hogy mely koordináta egyenletességét szeretnénk tesztelni. A vektorrendszerünk dimenzióját most  $\dim$  jelöli.

Az alábbi táblázatokban 100 futás eredményeinek százalékos megoszlását láthatjuk (3 tizedesre kerekítve), a fenti bontások esetén.

MATLAB <sup>®</sup>					
		Perem	törés = 2	törés = 4	törés = 5
2D	Nincs ritkítás	0	0	0	0
2D	Ritkítás = 2	0	0	0	0
2D	Ritkítás = 4	0	0	0	0
2D	Ritkítás = 8	0	0	0.125	0
2D	Ritkítás = 16	0	0.25	0.125	0.3
3D	Nincs ritkítás	0	0	0	0.033
3D	Ritkítás = 2	0	0	0	0
3D	Ritkítás = 4	0	0	0	0.067
3D	Ritkítás = 8	0	0	0	0.033
3D	Ritkítás = 16	0	0	0	0
5D	Nincs ritkítás	0	0	0	0
5D	Ritkítás = 2	0	0	0	0.03
5D	Ritkítás = 4	0	0.025	0	0.01
5D	Ritkítás = 8	0	0.05	0	0
5D	Ritkítás = 16	0	0	0	0.01

SAJÁT					
		Perem	törés = 2	törés = 4	törés = 5
2D	Nincs ritkítás	0	0.25	0	0
2D	Ritkítás = 2	0	0	0	0.2
2D	Ritkítás = 4	0	0.5	0.125	0.2
2D	Ritkítás = 8	0	0	0.125	0.1
2D	Ritkítás = 16	0	0.25	0	0
3D	Nincs ritkítás	0	0.583	0.292	0.367
3D	Ritkítás = 2	0	0.167	0.125	0.1
3D	Ritkítás = 4	0	0	0	0.1
3D	Ritkítás = 8	0	0.167	0	0
3D	Ritkítás = 16	0	0	0.125	0.033
5D	Nincs ritkítás	0.6	1.425	1.113	1.01
5D	Ritkítás = 2	1	0.4	0.125	0.06
5D	Ritkítás = 4	0.2	0.025	0.013	0.02
5D	Ritkítás = 8	0	0	0.013	0
5D	Ritkítás = 16	0	0	0.025	0.01

*Megjegyzés.* A tesztek – mint az látható – elfogadható eredményre vezettek, ugyanis a célkitűzést, miszerint nagyságrendileg olyan jó eredményeket szeretnénk elérni, mint a MATLAB® által használt véletlen egész vektorokat generáló algoritmus, lényegében teljesítettük. (Természetesen nem értük el azt a fajta, lényegében 0 valószínűségű határt, amit a MATLAB® produkált, viszont általában az 1%-os küszöb alatt tudtunk maradni).

Még az 5 dimenziós eset ritkítás mentes értékei is a 95%-os határ alatt maradtak (alig lépték át az 1%-ot), bár ezen a ritkítás segített, és 4-es ritkítás után már a MATLAB®-hoz hasonló eredményeket tudtunk kimutatni.

## 6.2. A $\chi^2$ -teszt eredményei

A  $\chi^2$ -próba eredményeit nem foglaljuk táblázatokba, ugyanis nem akadt fenn sem a MATLAB®, sem az általunk alkalmazott algoritmus.

## 6.3. A Kendall-féle teszt eredményei

Annyi módosítást alkalmaztunk még, hogy nem minden sorsolásban minden koordinátát minden más koordinátával vetettünk össze, hanem bármely bontás esetén véletlenszerűen választottunk ki 1-1 koordináta párt, akiket összehasonlítottunk egymással.

Például, 5 dimenzió esetén, ha a második koordináta alapján 4 részre bontottuk a generáláshoz alkalmazott kockát, majd azon belül a 3. szeletet teszteltük, akkor hol az első és negyedik, hol a harmadik és ötödik koordináta monotonitását hasonlítottuk össze, és így tovább.

Minden esetben a fent már említett 95%-os szignifikancia-szint melletti konfidencia-intervallumot fogjuk a táblázatokban megmutatni. A konfidencia-intervallumot jackknife eljárás [1] segítségével becsültük meg 100 futás eredményei alapján. A ritkítási beállítások itt is a „nincs ritkítás”, 2, 4, 8 és 16 voltak.

*Megjegyzés.* Mindegyik konfidencia-intervallum tartalmazza a 0 értéket, azaz a vektorokat nézve, koordinátánként sztochasztikusan domináns pár nem található, illetve szignifikánsan nem mutatható ki, hogy valamely koordináta pár mentén monoton növekedést, vagy csökkentést generálna szisztematikusan az algoritmus.

Továbbá megállapítható az is, hogy a konfidencia-intervallumok hossza nem túl variábilis, azaz egyik dimenzió egyik ritkításának esetén sem tapasztaltunk érdemileg hosszabb, vagy rövidebb konfidencia-intervallumot.

## 6.4. Az átrendezésteszt és a sorozateszt eredményei

Az előzetes tesztek 32-szeres ritkítás mellett is elvégeztük, azonban e két teszt futásideje és számításigénye okán csak 8-szoros ritkításig teszteltük magasabb esetszámon. Látható lesz, hogy a vizsgált dimenziók esetén már a 8-szoros ritkítás is elfogadhatóan jó eredményeket mutat.



Nincs Ritkítás	MATLAB <sup>®</sup>	SAJÁT
2D	[-0.0417; 0.0423]	[-0.0445; 0.0503 ]
3D	[-0.0680; 0.0417]	[-0.0516; 0.0458 ]
5D	[-0.0413; 0.0372]	[-0.0516; 0.0505 ]
<b>Ritkítás = 2</b>		
2D	[-0.0407; 0.0463]	[-0.0569; 0.0404 ]
3D	[-0.0414; 0.0425]	[-0.0528; 0.0557 ]
5D	[-0.0387; 0.0360]	[-0.0845; 0.0793 ]
<b>Ritkítás = 4</b>		
2D	[-0.0490; 0.0480]	[-0.0510; 0.0379 ]
3D	[-0.0431; 0.0381]	[-0.0516; 0.0554 ]
5D	[-0.0472; 0.0483]	[-0.0491; 0.0586 ]
<b>Ritkítás = 8</b>		
2D	[-0.0458; 0.0342]	[-0.0476; 0.0470 ]
3D	[-0.0405; 0.0351]	[-0.0533; 0.0419 ]
5D	[-0.0664; 0.0417]	[-0.0603; 0.0471 ]
<b>Ritkítás = 16</b>		
2D	[-0.0418; 0.0384]	[-0.0504; 0.0514 ]
3D	[-0.0368; 0.0432]	[-0.0510; 0.0500 ]
5D	[-0.0451; 0.0417]	[-0.0453; 0.0394 ]

#### 6.4.1. Az átrendezésteszt eredményei

A  $\chi^2$ -próba teszteredményihez hasonlóan itt sem foglaljuk táblázatba az adatokat, mert minden generált vektorrendszer átment ezen a próbán.

Az átrendezés hatására nem változott semmi. Azt tapasztaltuk, hogy az eljárások – 100 futásból – egyszer sem fogtak el egy generált rendszert sem.

#### 6.4.2. Sorozateszt eredményei

Ez a teszt (lásd [3]) a ritkítási paraméter beállításának tesztelését volt hivatott elvégezni.

Az eljárás során egy alap mátrixot generálva ritkításonként, több tesztet is végrehajtottunk.

Továbbra is 2, 3 és 5 dimenziós vektorokkal dolgoztunk. 5000 darab véletlen vektort generáltunk 1-1 sorozatban, a ritkítások mértékét változtatva.

Azt tapasztaltuk, hogy a teszten fennakadt futások aránya nem változik (sem a MATLAB<sup>®</sup>, sem a mi generátorunk esetén) a ritkítás paraméter növelésével.

### Sorozatteszt eredményei

Az alábbi két táblázatban ismertetjük, hogy az adott dimenzióban hány sorozatot generáltunk, illetve az adott sorozatszám mellett milyen arányban fogta meg a sorozatteszt a tesztelt algoritmust.

#### Futások száma

Ritkítás	2D	2D	3D	3D	5D	5D
mértéke	MATLAB <sup>©</sup>	Saját	MATLAB <sup>©</sup>	Saját	MATLAB <sup>©</sup>	Saját
Nincs ritkítás	10000	10000	10000	10000	10000	10000
Minden 2.	10000	10000	10000	10000	5000	5000
Minden 4.	5000	5000	1000	1000	1000	1000
Minden 8.	1000	1000	1000	1000	500	500

#### Megfogott futások aránya

Ritkítás	2D	2D	3D	3D	5D	5D
mértéke	MATLAB <sup>©</sup>	Saját	MATLAB <sup>©</sup>	Saját	MATLAB <sup>©</sup>	Saját
Nincs ritkítás	5,4%	5,3%	5,4%	5,4%	5,4%	5,2%
Minden 2.	5,4%	5,4%	5,6%	5,3%	5,3%	5,8%
Minden 4.	5,6%	5,2%	6,8%	4,8%	5%	5,1%
Minden 8.	5,7%	4,7%	4,1%	4,8%	4,6%	4,8%

A táblázatokból kiderül, hogy 1-2 tizedes eltérés van a MATLAB<sup>©</sup> generátora és a saját generátorunk között – ráadásul mindegyik az 5%-os hibahatár környékén mozog (a 6%-ot egy esetben lépi át a MATLAB<sup>©</sup> generátora).

Ez azt jelenti, hogy az általunk alkalmazott generátor ez alapján a teszt alapján sem mutat összességében rosszabb képet, mint a MATLAB<sup>©</sup> által használt általánosan elfogadott véletlen egész vektorokat generáló algoritmus.

### 7. Összegzés

Összefoglalásképpen elmondható, hogy a [6] cikkben ismertetett algoritmus átdolgozásával egy elfogadható eredményeket mutató algoritmust sikerült alkotni.

A vizsgálatra előre kiválasztott teszteken a referenciaként használt MATLAB<sup>©</sup> véletlen vektorokat generáló rendszere és az általunk javított algoritmus hasonlóan jó eredményeket mutattak.

Megállapítható, hogy a ritkítási paraméter használatával az algoritmusunk a magasabb dimenzióknál javuló tendenciát mutat, illetve nem különbözik lényegesen egymástól ebben a tekintetben sem a MATLAB<sup>®</sup> beépített és az általunk ismertett véletlen egész vektorokat generáló algoritmus. Érdeemes észrevenni, hogy a túl nagy ritkítás sem feltétlenül jó – részint nem javít már az eredményeken érdemben, a futásidőt viszont nagyban megnöveli.

Megfigyelhető, hogy az eloszlás illeszkedésének szempontjából a ritkításnak érdemi jelentősége nincsen (ahogy az várható is volt). Az egymás után generált vektorok közötti összefüggőség csökkentésére magasabb dimenzióban volt igazán hatása. Tapasztalataink szerint minden 16., vagy még későbbi vektor figyelembe vétele már nem javított érdemben az eredményeken, tehát a ritkítási paramétert elegendő pl. 8-as értékre beállítani.

Fontos kiemelni azt a tényt, hogy az ezen technikával megalkotott generátor ciklusa nem a belsejében alkalmazott szubrutintól függ elsősorban, hanem a generálás során kitöltendő tartományban található rácsponatok számától, melynek segítségével tetszőlegesen hosszú ciklushosszal rendelkező algoritmus konstruálható.

### Hivatkozások

- [1] EFRON, B. AND GONG, G.: *"A Leisurely Look at the Bootstrap, the Jackknife, and Cross-Validation"*, The American Statistician **37**, (1983) 36–48.
- [2] JANKE, W.: *Pseudo Random Numbers: Generation and Quality Checks*, Quantum Simulations of Complex Many-Body Systems: From Theory to Algorithms, Lecture Notes, J. Grotendorst, D. Marx, A. Muramatsu (Eds.), John von Neumann Institute for Computing, Jülich, NIC Series, Vol. 10, ISBN 3-00-009057-6, (2002) 447–458.
- [3] KNUTH, D.: *A programozás művészete*, Vol. 2, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, (1987) 51–87; 153–177.
- [4] MARSAGLIA, G.: *Diehard Battery of Tests of Randomness*, (1995). <http://stat.fsu.edu/pub/diehard/>
- [5] RAMIREZ ALFONSIN, J. L.: *The Diophantine Frobenius Problem*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Vol. 30, Oxford University Press, (2005).
- [6] VIZVÁRI, B.: *Generation of Uniformly Distributed Random Vectors of Good Quality*, Rutcor Research Report, (1994).

(Beérkezett: 2011. január 10.)

TAKÁCS SZABOLCS

Károli Gáspár Református Egyetem

Bölcsészettudományi Kar, Pszichológiai Intézet, Általános lélektani és módszertani tanszék

1037, Budapest, Bécsi út 324, 5. épület, fszt.

e-mail: tretarkhon@gmail.com

# A PROCEDURE FOR GENERATING HIGH QUALITY PSEUDO-RANDOM INTEGER VECTORS

SZABOLCS TAKÁCS

We present a method for generating high quality pseudo-random numbers or vectors, focusing on the applicability in applications.

The following measure of quality is used: the distribution of the generated vectors must be uniform and the cross-dependency between the generated vectors must be low. Other, traditional aspects from computer science are also considered.

We apply various tests to verify the quality of the generated sequences. As a reference, we used MATLAB<sup>®</sup>'s pseudo-random algorithm to compare our results against. We have fixed the set of test to be applied before generating any results. However, after the set of test methods have been fixed, we did tune our algorithm to improve it's performance on the tests.

## KÖLTSÉGELOSZTÁSI MODELLEK

KOVÁCS GERGELY ÉS RADVÁNYI ANNA

A cikk alapját egy öntözéses gazdálkodás területéről származó költségelosztási probléma adja. Felhasználók egy csoportja egy közös csatornarendszer segítségével látja el saját területének öntözését. A csatornarendszer egy közös ponton csatlakozik a főcsatornához, ahonnan a csatornarendszer vízellátását fedezik. A rendszer működéséhez és fenntartásához szükséges költségek a felhasználókat terhelik. Egy lehetséges költségelosztás megadja, hogy az egyes felhasználók külön-külön mekkora költségeket vállalnak a rendszer teljes költségéből. Természetesen a felhasználóknak együttesen fedezniük kell a teljes összköltséget. Az elosztásnak pedig olyannak kell lennie, amit minden résztvevő valamiféleképpen „igazságosnak” ítél meg.

Megvizsgáljuk tehát a költségelosztás fogalmát, elvárt tulajdonságait és modellezésének lehetőségeit, illetve értékeli az egyes megoldási javaslatokat. A cikkben Aadland és Kolpin [1] lánc-struktúrákra vonatkozó eredményeit általánosítjuk fával reprezentálható csatornarendszerekre, kiegészítve azokat további, szintén vízgazdálkodási problémák kapcsán felmerült modellekkel [6].

### 1. Bevezetés

A cikk alapját egy költségelosztási probléma adja. Gazdálkodók egy csoportja egy főcsatornához csatlakozó csatornarendszerből fedezi saját földterületének vízigényét. A csatornarendszer működtetése és karbantartása költségeket von maga után, ezeket a gazdálkodók közösen állják. A probléma pedig az, hogy a gazdálkodók (továbbiakban felhasználók) hogyan osszák fel „igazságosan” egymás között a csatornarendszerre vonatkozó összköltséget. A bevezetőt követően megismerkedünk az alapmodellekkel és az „igazságosság” fogalmát megragadni kívánó axiómákkal. Az axiómák alapját Aadland és Koplin [1] munkája adja.

Modelljeink alapjai a valós életből vett problémák megoldása során felmerült megoldási javaslatok. Aadland és Kolpin [2] munkájukban a Montana állambeli állattenyésztők által évtizedek óta ténylegesen alkalmazott költségelosztási sémákat vizsgáltak. Két elosztási rendszert írtak le, az átlag szerinti és a soros elosztási elveket. Ezen felül bemutatták a korlátozott átlag szerinti költségelosztást [1], mely az előző két elosztás „előnyeit” egyesíti. Ezen láncokra megfogalmazott modelleket általánosítjuk fa-struktúrákkal reprezentálható problémák esetében, és

megmutatjuk, hogy továbbra is rendelkeznek a láncokra megfogalmazott elosztások tulajdonságaival. A további két általunk vizsgált modell alapját szintén valós vízgazdálkodási probléma kapcsán felmerült megoldási javaslatok adják. A Tennessee Valley Authority 1933-ban alakult többek között a Tennessee Völgy gazdasági fejlesztésének kidolgozására. A TVA munkásságát a közgazdasági, illetve játékelméleti szakirodalomban Straffin és Heaney [6] mutatták be először, a szeparálható-nem szeparálható költségekre alapozott módszerek innen eredeztethetőek. Modelleink megfogalmazásának alapját Solymosi [5] munkája adja.

A formális elemzéshez először is foglaljuk össze a példánkban szereplő csatorna-rendszer két legfontosabb sajátosságát! Először is minden felhasználó alapvetően saját földterületének öntözése céljából használ vizet, az állatállomány eltartására szolgáló vízmennyiség és az ebből eredő költségek elhanyagolható nagyságrendűek. Az általános tapasztalat pedig azt mutatja, hogy az öntözőcsatornák kapacitása elegendő az összes érintett földterület öntözéséhez. Így tehát a feladat nem egy adott vízmennyiség elosztása, sokkal inkább a csatornák működési, fenntartási és egyéb költségeinek a felhasználók közötti elosztása lesz.

## 2. Alapmodellek

Reprezentáljuk a feladatot egy fával, a fa gyökere legyen a főcsatorna (amit 0. csúcsnak fogunk tekinteni), a fa egyéb csúcsai pedig a felhasználók.  $\mathcal{L}$ -lel a fa leveleinek halmazát jelöljük.

Legyen  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  a főcsatornához csatlakozó felhasználók véges, rendezett halmaza. A felhasználók halmazán definiálható egy rendezés, ami reflexív, tranzitív, de nem feltétlenül teljes, ugyanis nem minden esetben lesz bármely két felhasználó pozíciója összehasonlítható. Tekintsük például a gráfon a gyökértől kiindulva végrehajtott mélységi keresés elérési sorrendjét. Az így kapott sorrendben jelölje  $i$  a zsiliptól számított  $i$ -edik felhasználót. A csatorna-rendszer  $i$ -edik szakasza (azaz a gráf  $i$ -edik éle) legyen az a szakasz, amivel az  $i$ -edik felhasználó a rendszerhez csatlakozik. Minden  $i \in N$ -re jelölje  $c_i$  a főcsatorna  $i$ -edik szakaszára eső éves fenntartási költségét, az ezen költségek által meghatározott költségvektort pedig  $c = (c_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}_+^N$ . A keresett eredmény a  $\sum c_i$  összesített költség egy „igazságos” elosztása lesz.

*Megjegyzés.* Speciális esetben a probléma egyetlen láncsal reprezentálható, aminek első csúcsa a főcsatorna, a felhasználók pedig a lánc további, egymás után következő csúcsai. Ekkor a rendezés a természetesen adódó sorrend szerinti lesz.

A továbbiakban definiálni fogunk különböző költségelosztási sémákat, és megvizsgáljuk, milyen természetesen adódó tulajdonságokkal rendelkeznek. Ehhez szükségünk van néhány jelölés bevezetésére.

Egy  $i$  felhasználóra megkülönböztetjük az öt megelőző és az öt követő felhasználók halmazát. Jelölje  $I_i^-$  azon csúcsok halmazát, melyek az  $i$ -t a gyökérrel össze-

kötő, egyértelmű úton helyezkednek el. Ez a halmaz lesz az  $i$ -t megelőző felhasználók halmaza. Most tekintsünk egy olyan irányítást, ahol a fa éleit a gyökértől, mint forrástól kifelé mutató irányítással látjuk el, azaz a gyökérből csak kifelé vezetnek élek, minden további csúcs be-foka pedig egy. Az ilyen irányítással ellátott fában jelölje  $I_i^+$  az  $i$ -ből irányított úton elérhető csúcsok halmazát. Ez pedig az  $i$ -t követő felhasználók halmaza lesz.

Vagyis  $I_i^- = \{j \in N \mid j < i\}$ ,  $I_i^+ = \{j \in N \mid i < j\}$ , ahol a  $j < i$  reláció fennállása jelöli, ha létezik  $j$ -ből  $i$ -be irányított út.

Példánkban először kétféle elosztási szabályt vizsgálunk, az (a) átlag szerinti és (b) a soros elosztást. A költségek mérhetők hektáronkénti egységben, egységnyi felhasznált vízmennyiségben vagy felhasználónként, mi ez utóbbit fogjuk tekinteni. (A 2.1. definíció és a fejezetben felhasznált axiómák alapjául Aadland és Kolpin [1] munkája szolgált.)

**2.1. Definíció.** Egy  $\xi : \mathbb{R}_+^N \rightarrow \mathbb{R}_+^N$  leképezés egy költségelosztási szabály, ha  $\forall c \in \mathbb{R}_+^N$ -re  $\sum \xi_i(c) = \sum c_i$ , ahol  $(\xi_i(c))_{i \in N} = \xi(c)$ .

(a) Az átlag szerinti költségelosztási szabály szerint a csatorna fenntartási költségeit egyenlő arányban osztjuk szét minden felhasználó között, azaz

$$\xi_i^a(c) = \sum_{j \in N} \frac{c_j}{n} \quad \forall i \in N\text{-re.}$$

(b) A soros költségelosztási szabály szerint az egyes szegmensekre eső költségeket osztjuk el egyenlő módon azok között, akik az adott szegmenst igénybe veszik, vagyis

$$\xi_i^s(c) = \sum_{j \in I_i^- \cup \{i\}} \frac{c_j}{|I_j^+| + 1} \quad \forall i \in N\text{-re.}$$

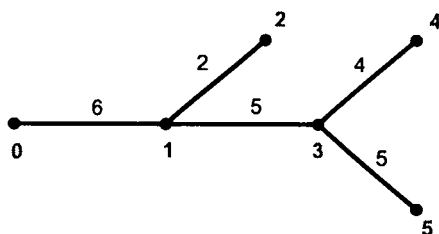
*Megjegyzés.* Utóbbi speciálisan a *lánc* esetére így is felírható:

$$\xi_i^s(c) = \frac{c_1}{n} + \dots + \frac{c_i}{(n - i + 1)} \quad \forall i \in N\text{-re.}$$

A definíció tartalmát a következő két példával szemléltetjük:

**2.1. Példa.** Tekintsünk először egy példát lánc esetén! Legyen  $N = \{1, 2, 3\}$  és  $c = \{6, 1, 5\}$ . Az átlag szerinti elv esetén az aggregált költségek elosztása a felhasználók között egyenlő mértékű, azaz  $\xi^a(c) = (4, 4, 4)$ . Másrészt a soros elosztási szabályt alkalmazva az első szegmens költségeit mindhárom felhasználó között kell egyenlően felosztani, a második szegmenst a 2-es és 3-as számú között, míg a harmadik szegmens költségeit egyedül a 3-as felhasználó állja. Így tehát a következő elosztást kapjuk:  $\xi^s(c) = (2; 2, 5; 7, 5)$ .

Most pedig lássuk, milyen eredményt kapunk az alábbi ábrával reprezentálható esetben:



1. ábra. Fa-struktúrával reprezentált csatornarendszer

2.2. *Példa.* A fenti ábra egy olyan csatornarendszert ábrázol, ahol  $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  a felhasználók halmaza,  $c = (6, 2, 5, 4, 5)$  a megfelelő szakaszokhoz tartozó költségeket leíró költségvektor. 0 jelöli a fa gyökerét, ez reprezentálja a főcsatornát, ahova a csatornarendszerünk becsatlakozik. Ebben az esetben a következő megoldások adódnak:  $\xi^a(c) = (4, 4; 4, 4; 4, 4; 4, 4; 4, 4)$ , illetve  $\xi^s(c) = (1, 2; 3, 2; 2, 87; 6, 87; 7, 87)$ . Az átlag szerinti elosztás esetén a teljes összköltséget – ami 22 – osztottuk fel 5 egyenlő részre. A soros esetében pedig a  $c_1$  szakaszhoz tartozó költséget osztottuk 5 egyenlő részre, mert ezt mind az 5 felhasználó igénybe veszi. A  $c_2$  költséget egyedül a második felhasználó állja, a  $c_3$ -at a 3-as, 4-es, 5-ös felhasználó között kell egyenlő arányban felosztani, a  $c_4$  egyedül a 4-es, a  $c_5$  pedig egyedül az 5-ös felhasználó költségét képezi. Ezeket a részköltségeket kell összeadni az egyes felhasználókra vonatkozó szakaszoknak megfelelően.

A következőkben karakterizáljuk a költségelosztási sémákat, bevezetünk olyan axiómákat, melyek teljesülése a modellezés szempontjából jogosan elvárható.

Vektorok összehasonlítása alatt minden esetben koordinátánkénti összehasonlítást fogunk érteni, tehát  $c \leq c'$ , ha  $\forall i \in N$ -re  $c_i \leq c'_i$ .

2.1. *Axióma.*  $\xi$  költségmonoton, ha  $\forall c \leq c'$  esetén  $\xi(c) \leq \xi(c')$ .

2.2. *Axióma.*  $\xi$  rang-tulajdonságú, ha  $\forall c \in \mathbb{R}_+^N$  és  $\forall j$ -re  $\forall i \in I_j^- \cup \{j\}$  esetén  $\xi_i(c) \leq \xi_j(c)$ .

*Megjegyzés.* Lánc esetén pedig  $\forall i \leq j$ -re  $\xi_i(c) \leq \xi_j(c)$ .

2.3. *Axióma.*  $\xi$  szubvenciómentes, ha  $\forall c \in \mathbb{R}_+^N$  és  $\forall I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq N$  halmaz esetén

$$\sum_{j \in J} \xi_j(c) \leq \sum_{j \in J} c_j,$$

ahol az egyszerűség kedvéért  $J := I_{i_1}^- \cup \dots \cup I_{i_k}^- \cup I$ , ahol  $J$  részfa.



*Megjegyzés.* Láncra pedig a  $J$  halmaz mindig az  $I$  legnagyobb indexű  $i$  tagjához tartozó  $I_i^- \cup \{i\}$  halmaz lesz, azaz  $j \in J$  pontosan akkor teljesül, ha  $j \leq i$ . Ebben az esetben tehát elég azt írni, hogy  $\forall i \in N$  és  $c \in \mathbb{R}_+^N$  esetén

$$\sum_{j \leq i} \xi_j(c) \leq \sum_{j \leq i} c_j.$$

A három axióma értelmezése kézenfekvő. A költségmonotonitás felel azért, hogy növekvő költségek esetén egyetlen felhasználóra eső költség se csökkenhessen. Ez a kritérium biztosítja, hogy semelyik felhasználó se tegyen szert haszonra olyan esetleges ügyletek által, melyek az összköltséget növelnék.

A rang-tulajdonság biztosítja, hogy a költségelosztások rangsorolhatók aszerint, hogy az egyes felhasználók a csatorna mekkora hányadát használják. Vagyis, ha  $i \in I_j^-$ , akkor a  $j$  felhasználó definíció szerint több szegmensét használja a főcsatornának, mint  $i$ , azaz a  $j$ -re eső költség legalább akkora, mint az  $i$ -re eső.

A szubvenció-mentesség pedig megakadályozza, hogy a felhasználók bármely csoportjának többet kelljen fizetnie, mint a csoport kollektív költsége. (Megjegyezzük, hogy a szubvenció-mentesség axiómája a felhasználóknak csak olyan csoportjaira vonatkozik, amelyek részfat alkotnak.) Ha a szubvenció esete állna fenn, akkor a felhasználók néhány csoportjának fizetnie kellene az általuk használt csatornaszakaszokért, és további „támogatást” nyújtanának a csatorna mentén hátrébb elhelyezkedő felhasználóknak. Ez pedig sértene azt a célunkat, mely szerint a költségek „igazságos” elosztására törekszünk. (A megfelelően definiált kooperatív játékokban a szubvenció-mentesség felel majd azért, hogy mag-elosztást kapjunk. [4]) Könnyen ellenőrizhető továbbá, hogy a soros költségelosztási elv kielégíti mindhárom axiómát, míg az átlag szerinti csak az első kettőt [1].

A továbbiakban megemlítünk két további lehetséges elosztási elvet és megvizsgáljuk, mely axiómákat elégítik ki. Ezen modellek alapját Solymosi [5] munkája adja. Vezessük be tehát az alábbi fogalmakat!

Jelölje  $c(N)$  a csatorna fenntartásának összköltségét, azaz a  $\sum_{i \in N} c_i$  értéket.

Az  $s_i = c(N) - c(N \setminus i)$  költséget a fogyasztó *szeparálható költségének* nevezzük, ahol  $c(N \setminus i)$  jelöli a csatorna fenntartási költségét, amennyiben az  $i$ -t nem kell kiszolgálni. (Vegyük észre, hogy  $s_i$  a leveleken mindig  $c_i$ -vel egyezik meg, egyébként 0.) Olyan  $\xi(c)$  költségallokációt keresünk, amelyik teljesíti a  $\xi_i(c) \geq s_i$  egyenlőtlenséget minden  $i \in N$  esetén. További kérdés még, hogy mennyit fedezzenek az egyes fogyasztók a fennmaradó, összesen

$$k(N) = c(N) - \sum_{i \in N} s_i = c(N) - \sum_{i \in \mathcal{L}} c_i$$

*közös költségből.* A fogyasztók ugyanis nem egyforma mértékben használják a csatornát, csak különböző részeire van szükségük. Így azt sem szeretnénk, ha a fogyasztók többet fizetnének annál, mintha egyedül használnák a csatornát. Jelöl-

jük  $e(i)$ -vel az  $i \in N$  fogyasztónak az így értelmezett ún. *egyedi költségét*, vagyis

$$e(i) = \sum_{j \in I_i^- \cup \{i\}} c_j.$$

Az „igazságosság” értelmében tehát teljesülnie kell a  $\xi_i(c) \leq e(i)$  egyenlőtlenségnek, minden  $i \in N$ -re. Természetesen a fentiekben említett két korlátozás csak akkor kielégíthető, ha

$$c(N) \leq c(N \setminus i) + e(i),$$

minden  $i \in N$ -re. Ez a mi esetünkben mindig teljesül. Átrendezve az egyenlőtlenséget ez annyit jelent, hogy

$$c(N) - c(N \setminus i) \leq e(i), \text{ azaz } s_i \leq e(i).$$

Ha  $i$  nem levél, akkor  $s_i$  értéke 0,  $e(i)$  pedig triviálisan mindig nemnegatív, ha pedig  $i$  levél, akkor  $s_i = c_i$ , vagyis  $c_i \leq e(i)$  kell, hogy teljesüljön, ami  $e(i)$  definíciójából látszik.

Az egyéni költségekből a szeparálható költségeket kivonva kapjuk a  $(k(i) = e(i) - s_i)_{i \in N}$  vektort, ami a közös rész egyéni használatokor felmerülő költségeket tartalmazza.

Ezek alapján tekintsük az alábbi költségelosztásokat:

- A közös költség *egyenlő* elosztása:

$$\xi_i^{egy}(c) = s_i + \frac{1}{|N|} k(N) \quad \forall i \in N\text{-re.}$$

- A közös költség *egyéni használatból eredő költségrészek arányában* történő elosztása:

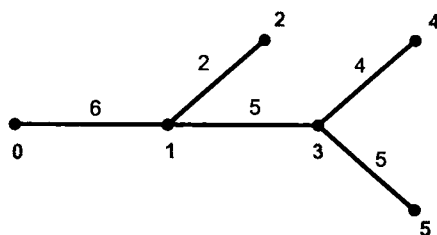
$$\xi_i^{cha}(c) = s_i + \frac{k_i}{\sum_{j \in N} k_j} k(N) \quad \forall i \in N\text{-re.}$$

**2.3. Példa.** Gondoljunk vissza a korábbi, fákra vonatkozó példákra (2. ábra). Ebben az esetben ez utóbbi két elosztásunk a következőképpen számolható:  $c(N) = 22$ ,  $s = (0, 2, 0, 4, 5)$ ,  $k(N) = 11$ ,  $e = (6, 8, 11, 15, 16)$  valamint  $k = (6, 6, 11, 11, 11)$ . Ebből adódik, hogy  $\xi^{egy}(c) = (2, 2; 4, 2; 2, 2; 6, 2; 7, 2)$  illetve  $\xi^{cha}(c) = (1, 47; 3, 47; 2, 69; 6, 69; 7, 69)$ .

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy ezen költségelosztások mely axiómákat elégítik ki. Tekintsük először a közös rész egyenlő elosztásának esetét!

**2.1. LEMMA.** *A  $\xi^{egy}$  költségmonoton.*

**Bizonyítás.** Azt kell belátni, hogy tetszőleges  $c \leq c'$  esetén  $\xi^{egy}(c) \leq \xi^{egy}(c')$ . Az  $s(c)$  szeparálható költségekből álló vektor ebben az esetben olyan, hogy minden



2. ábra. Fa-struktúrával reprezentált csatornarendszer

$i \in \mathcal{L}$  esetén  $s_i = c_i$ , egyébként pedig 0. Ezért két esetet különböztetünk meg, először, amikor a költségnövekedés nem levélen realizálódik, másodszor pedig, amikor levél esetén nő. Az első esetben az  $s$  vektor nem változik, viszont  $k(N)_c \leq k(N)_{c'}$ , mivel

$$k(N)_c = c(N) - \sum_{i \in \mathcal{L}} c_i,$$

$$k(N)'_c = c'(N) - \sum_{i \in \mathcal{L}} c'_i = c'(N) - \sum_{i \in \mathcal{L}} c_i$$

és  $c(N) \leq c'(N)$ , így tehát kész vagyunk.

A második esetben azonban éppen azt kapjuk, hogy  $i \in \mathcal{L}$  esetén  $s_i(c) \leq s_i(c')$ ,

$$k(N)_c = \sum_{i \in N \setminus \mathcal{L}} c_i = \sum_{i \in N \setminus \mathcal{L}} c'_i = k(N)'_c,$$

vagyis  $k(N)$  nem változik, tehát összességében a  $\xi_n^{egy}$  értéke nem csökkenhetett. Amennyiben a két eset együttesen áll fenn, úgy a növekedés az  $s$  vektorban és a  $k(N)$  értékben is megmutatkozik, így az összegükre is igaz, hogy nem csökkenhet.  $\square$

2.2. LEMMA. A  $\xi^{egy}$  teljesíti a rang-tulajdonságot.

*Bizonyítás.* Azt kell ellenőrizni, hogy tetszőleges  $i$ -re és  $j$ -re  $i \in I_j^-$  esetén  $\xi_i^{egy}(c) \leq \xi_j^{egy}(c)$ . Mivel azonban rögzített  $c$ -re  $\xi_i^{egy}(c) = \xi_h^{egy} \forall i, h \in I_j^-$  esetén, és  $j \in \mathcal{L}$ -re  $\xi_i^{egy} < \xi_j^{egy} \forall i \in I_j^-$ -re, így az állítás teljesülése nyilvánvaló.  $\square$

2.3. LEMMA. A  $\xi^{egy}$  elosztás pontosan akkor nem szubvenciómentes, ha a problémát reprezentáló fában van legalább 3-hosszú lánc.

*Bizonyítás.* Abban az esetben, ha a fa csupa 1-hosszú láncokból áll, a szubvenció-mentesség triviálisan teljesül, minden esetben  $\xi_i = c_i$ .

Ha a fában legfeljebb 2-hosszú láncok szerepelnek, szintén teljesül a szubvenció-mentesség. Egy konkrét 2-hosszú lánc esetén ugyanis a következőket tudjuk:

$c(N) = c_1 + c_2$ ,  $s = (0, c_2)$ ,  $k(N) = c_1$ . Ekkor  $\xi_1(c) = 0 + \frac{c_1}{2}$ ,  $\xi_2(c) = c_2 + \frac{c_1}{2}$ , ami azt jelenti, hogy  $\xi_1(c) \leq c_1$  és  $\xi_1(c) + \xi_2(c) \leq c_1 + c_2$ , vagyis a szubvenció-mentesség mindig teljesül, ha  $|N| = 2$ .

Egy további esetet még meg kell említenünk: a fában legfeljebb 2-hosszú láncok szerepelnek, de ezek nem „függetlenek”, hanem „elágazók”. Azaz az első csúcsból külön-külön ágazik el egy-egy további pont (3 csúcsra ez egy „Y-alakot” jelent). A fenti számolással analóg módon meggondolható, hogy a szubvenció-mentesség az ilyen „elágazó” esetekben is teljesül, ugyanis a  $c_1$  költség osztódik tovább annyi részre, ahány további csúcs kapcsolódik hozzá. Így tehát legfeljebb 2-hosszú láncokra a szubvenció-mentesség fennáll. Ha pedig egy legfeljebb 2-hosszú láncokból álló fában ez láncenként teljesül, akkor akárhogy választva csúcsokat, a szubvenció-mentesség teljesülni fog, ugyanis csak a megfelelő egyenlőtlenségeket kell összegezni, amikről külön-külön tudjuk, hogy igazak, és így az összegükre is igaz lesz.

Tekintsük most azt az esetet, amikor a fában szerepel legalább 3-hosszú lánc. Mivel a tulajdonságnak minden költségstruktúrára fenn kell állnia, elég egyetlen példát adnunk, amikor a tulajdonság nem teljesül. Ekkor a legalább 3-hosszú láncra (ha több ilyen van, akkor egy tetszőlegesre) a következőket írhatjuk fel:  $c(N) = c_1 + c_2 + \dots + c_n$ ,  $s = (0, 0, \dots, 0, c_n)$ ,  $k(N) = c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1}$ . Ezek alapján  $\xi_1(c) = 0 + \frac{c_1 + \dots + c_{n-1}}{n}$ , ami azt jelenti, hogy  $c_1$  minden esetben megválasztható úgy, hogy már a  $\xi_1(c) \leq c_1$  feltétel se teljesüljön.

Tekintsünk egy egyszerű ellenpéldát pontosan 3-hosszú láncra! Ekkor speciálisan  $\xi_1 = \frac{c_1 + c_2}{3}$ , tehát elég olyan  $c_1$ -et választani, ami ennél kisebb, vagyis, amire  $c_2 > 2c_1$  teljesül. Legyen például a konkrét lánc  $c = (3, 9, 1)$ , ekkor  $c(N) = 13$ ,  $s = (0, 0, 1)$ ,  $k(N) = 12$  és így  $\xi^{ev}(c) = (0 + \frac{12}{3}, 0 + \frac{12}{3}, 1 + \frac{12}{3}) = (4, 4, 5)$ . Azaz az első felhasználónak többet kell fizetnie, mint amennyi a belépésének a költsége, és a többletfizetéssel mintegy „támogatja” a tőle hátrébb elhelyezkedő többi felhasználót. Ebből tehát látszik, hogy a szubvenció-mentesség nem teljesül, amennyiben a fában található legalább 3-hosszú lánc.  $\square$

Vegyük most a közös költség egyéni használatból eredő költségrészek arányában történő elosztását!

#### 2.4. LEMMA. A $\xi^{cha}$ nem költségmonoton.

*Bizonyítás.* Egyszerű ellenpéldával igazoljuk: vegyünk egy 4-hosszú láncot, legyen  $N = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $c = (1, 1, 3, 1)$ ,  $c' = (1, 2, 3, 1)$ . A költségnövekedés  $i = 2$  esetén valósul meg. Ekkor a költség-monotonitás már a  $\xi^{cha}(c)$  és  $\xi^{cha}(c')$  első koordinátáira sem lesz igaz. Ugyanis  $\xi_1^{cha}(c) = \frac{5}{13} = 0,384$ , illetve  $\xi_1^{cha}(c') = \frac{6}{16} = 0,375$ , vagyis  $\xi^{cha}(c) \geq \xi^{cha}(c')$  biztosan nem teljesül.  $\square$

2.5. LEMMA. A  $\xi^{eha}$  teljesíti a rang-tulajdonságot.

*Bizonyítás.* Azt kell belátni, hogy  $i \in I_j^-$  esetén  $\xi_i(c) \leq \xi_j(c)$ .

Definíció alapján:

$$\xi_i(c) = s_i + \frac{k(i)}{\sum_{l \in N} k(l)} \cdot k(N),$$

$$\xi_j(c) = s_j + \frac{k(j)}{\sum_{l \in N} k(l)} \cdot k(N).$$

Minden  $i \in I_j^-$ -re tudjuk, hogy  $s_i \leq s_j$ , mivel  $i \in N \setminus \mathcal{L}$ , így  $s_i = 0$ ,  $s_j$  pedig 0, ha  $j \in N \setminus \mathcal{L}$  vagy  $c_j$ , ha  $j \in \mathcal{L}$ . Már csak a  $k(i) = e(i) - s_i$  és  $k(j) = e(j) - s_j$  viszonyát kell tisztázni. Azt kell belátni, hogy  $k(i) \leq k(j)$ , minden  $i \in I_j^-$  esetben. Ekkor ugyanis  $\xi_i(c) \leq \xi_j(c)$ .

1.  $i \in I_j^-$ ,  $j \notin \mathcal{L}$

Ekkor  $s_i = s_j = 0$  és  $e(i) < e(j)$ , mivel  $e(i) = \sum_{l \in I_i^- \cup \{i\}} c_l$  és  $e(j) = \sum_{l \in I_j^- \cup \{j\}} c_l$ ,

illetve  $I_i^- \cup \{i\} \subset I_j^- \cup \{j\}$ , amennyiben  $i \in I_j^-$ . Vagyis  $k(i) < k(j)$ .

2.  $i \in I_j^-$ ,  $j \in \mathcal{L}$

Ekkor  $0 = s_i < s_j = c_j$ .

Ebben az esetben:

$$k(i) = e(i) - s_i = \sum_{l \in I_i^- \cup \{i\}} c_l - 0 = \sum_{l \in I_i^- \cup \{i\}} c_l,$$

$$k(j) = e(j) - s_j = \sum_{l \in I_j^- \cup \{j\}} c_l - c_j = \sum_{l \in I_j^-} c_l.$$

–  $i = j - 1$ -re  $k(i) = k(j)$ ,

–  $i \in I_{j-1}^-$ -re  $k(i) \leq k(j)$ .

Vagyis minden esetben  $k(i) \leq k(j)$ , amivel az állítást igazoltuk.  $\square$

2.6. LEMMA. A  $\xi^{eha}$  nem minden  $c \in \mathbb{R}^+$  esetén elégíti ki a szubvenció-mentességet.

*Bizonyítás.* Tekintsük a következő ellenpéldát: egy 5-hosszú láncra legyen  $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $c = (10, 1, 1, 100, 1)$ . Ekkor az elosztásra a következőt kapjuk:  $\xi^{eha} = (4, 35; 4, 79; 5, 23; 48, 81; 49, 81)$ . A szubvenció-mentesség  $i = 3$  esetén nem teljesül, ugyanis  $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 14, 37 > 12 = c_1 + c_2 + c_3$ .  $\square$

### 3. A korlátozott átlag szerinti elosztás

Egy gazdálkodók között végzett felmérésben a megkérdezettek válasza azt mutatták, hogy az eddigiekben leírt axiómák bármelyikének áthágása egyfajta „igazságtalanságot” eredményez [2]. Ugyanakkor azt érezhetjük, hogy a soros elosztás esetében a hátrébb elhelyezkedő felhasználóknak olykor már „túl sokat” kellene fizetniük, ami szintén sértheti az alapvető „igazságossági” szándékunkat. Ezeket a megállapításokat kell összhangba hozni egy látszólag átlag szerinti költségelosztás létezésének tényével. Ezért definiálunk egy módosított szabályt, amely a lehető „legközelebb” esik az átlag szerinti elosztási szabályhoz, és mindhárom axiómát kielégíti. Ebben a részben Aadland és Kolpin fogalmait és eredményeit általánosítjuk láncról fára [1].

**3.1. Definíció.** Egy korlátozott átlag szerinti költségelosztási szabály egy költségmonoton, rang-tulajdonságú, szubvenciómentes elosztási elv, ahol az eltérés a szétosztott legmagasabb és legalacsonyabb költségek között a legkisebb, az összes lehetséges elosztási elvet tekintve.

Nyilvánvaló, hogy az átlag szerinti elosztás esetén a legmagasabb és legalacsonyabb költségek megegyeznek. A korlátozott átlag szerinti elosztás ezt a ténytet próbálja realizálni, megőrizve a jogosan elvárt kritériumokat, azaz kielégítve az axiómákat. A fenti definíció azonban nem garantálja sem a létezést, sem az egyértelműséget. A létezés kérdését foglalja magába az a probléma, hogy a különböző költségprofilok különböző minimalizálási eljárásokhoz vezetnek-e, a szétosztott költségek közötti eltérésre nézve. Az egyértelműség kérdésének felmerülése pedig abból a tényből következik, mely szerint az említett minimalizáció nem ad direkt kikötéseket a „közbülső” költségekre. Az 3.1. tétel az egyetlen korlátozott átlag szerinti költségelosztási szabály létezését fogalmazza meg.

Ehhez vezessük be a következőket: Adottak  $H \subset I$  részfák. Legyen

$$P(H, I) = \frac{\sum_{j \in I \setminus H} c_j}{|I| - |H|}.$$

$P(H, I)$  reprezentálja az  $I \setminus H$  csatorna részekhez tartozó felhasználónkénti költségeket, a megfelelő szegmensekhez tartozó felhasználók között felosztva.

**3.1. TÉTEL.** Egyértelműen létezik egy  $\xi^r$  korlátozott átlag szerinti költségelosztási szabály, mely rekurzíven konstruálható a következő módon: legyen

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \min \{P(0, J) \mid J \text{ részfák}\}, & J_1 &= \max \{J \mid P(0, J) = \mu_1\}, \\ \mu_2 &= \min \{P(J_1, J) \mid J_1 \subset J \text{ részfák}\}, & J_2 &= \max \{J \mid P(J_1, J) = \mu_2\}, \\ &\vdots & &\vdots \\ \mu_j &= \min \{P(J_{j-1}, J) \mid J_{j-1} \subset J \text{ részfák}\}, & J_j &= \max \{J \mid P(J_{j-1}, J) = \mu_j\}, \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

és  $\xi_i^r(c) = \mu_j \ \forall j = 1, \dots, n', J_1 \subset J_2 \subset \dots \subset J_{n'} = N$ , ahol  $i \in J_j \setminus J_{j-1}$ .

A fenti formula látszólag bonyolult, valójában azonban könnyen kiszámolható. A  $\mu_1$  értéke egyszerűen a legalacsonyabb az egy főre eső költségek között,  $J_1$  pedig a csatorna szegmensek legbővebb részfája, amin ez a legalacsonyabb költség érvényesül. A  $J_1$ -ből induló csatornaszakaszokhoz tartozó legkisebb egy főre jutó költség a  $\mu_2$ , ez a  $J_2 \setminus J_1$  részrendszeren realizálódik, és így tovább.

**3.1. Példa.** Ebben az esetben a minimális egy főre jutó költség 4, a legbővebb részfa, amin ez felvétetik, a  $J_1 = \{1, 2\}$  részfa, tehát itt  $\mu_1 = 4$ . A fennmaradó részfában az egy főre eső minimális költség 4, 5, ami a  $J_2 = \{3, 4\}$  részfán vétetik fel, vagyis  $\mu_2 = \frac{(c_3+c_4)}{2} = 4,5$ . A fennmaradó  $c_5$  költség pedig a  $J_3 = \{5\}$ -ra vonatkozik, azaz  $\mu_3 = 5$ . Ezek alapján  $\xi^r(c) = (4; 4; 4,5; 4,5; 5)$ .

Most pedig tekintsük a 3.1. tétel bizonyítását!

**Bizonyítás.** Könnyen ellenőrizhető a  $P(H, I)$  definíciójából kiindulva, hogy a konstrukcióval megadott  $\xi^r$  teljesíti az alaptulajdonságokat. Majd tegyük fel, hogy van egy másik, ami legalább olyan jó a célfüggvényt tekintve, azaz  $\xi^r$  mellett  $\xi$  is rendelkezik az elvárt tulajdonságokkal. Tekintsünk egy olyan fát és  $c$  költségvektort, amire a  $\xi$  a  $\xi^r$ -től eltérő eredményt ad,  $n'$  értéke pedig legyen  $\xi^r$  konstrukciójában minimális. Ha  $\xi(c) \neq \xi^r(c)$ , akkor létezik  $i$ , amire  $\xi_i(c) > \xi_i^r$ , az ilyenek között is tekintsük a legkorábbi (a csúcsok rögzített sorrendjében a legkorábbi ilyen tulajdonságú csúcsot). Ez az  $i \in J_k \setminus J_{k-1}$ , azaz  $\xi_i^r(c) = \mu_k$ . Két esetet vizsgálunk:

1.  $k < n'$ :

$\xi^r$  konstrukciója miatt  $\sum_{j \in J_k} \xi_j^r(c) = \sum_{j \in J_k} c_j \geq \sum_{j \in J_k} \xi_j(c)$ , utóbbi egyenlőtlenség a szubvenció-mentességből következik. Az egyenlőtlenség fennállásából adódik, hogy létezik  $h \in J_k$ , amire  $\xi_h^r(c) > \xi_h(c)$ .

Emellett  $c' < c$  legyen a következő:  $j \in J_k$  esetén  $c'_j = c_j$ ,  $j \notin J_k$ -ra pedig  $\xi_j^r(c') = \mu_k$ . Ez utóbbi csökkentés elvégezhető, mert  $c$ -ben a  $J_k$ -n kívüliekre a konstrukcióból következően  $\xi_j^r(c)$  értéke  $\mu_k$  értékénél nagyobb volt. A költségmonotonitás miatt, valamint a  $h$  választásából és a  $c'$  konstrukciójából a következők adódnak:

$$\xi_h(c') \leq \xi_h(c) < \xi_h^r(c) = \xi_h^r(c') = \mu_k.$$

Tehát  $\xi_h(c) < \xi_h^r(c)$ , emellett  $c'$  esetén a konstrukció csak  $k < n'$  lépésből áll, ami ellentmond  $n'$  minimalitásának. ( $n' = 1$  esetén  $\xi^r$  épp az átlaggal egyenlő, tehát egyértelmű.)

2.  $k = n'$ :

Ekkor  $\xi_i(c) > \xi_i^r(c) = \mu_{n'}$ , ugyanakkor  $\xi_1(c) \leq \xi_1^r(c)$  (mert  $k = n'$  miatt nincs korábbi, ami nagyobb lenne). Vagyis  $\xi$  esetén a szétosztott legkisebb és legnagyobb költségek közti eltérés nagyobb, mint  $\xi^r$  esetén, ami ellentmond a minimalitási feltételnek.  $\square$

Definíció szerint tehát a korlátozott átlag szerinti költségelosztást a szétosztott legnagyobb és legkisebb költségek közti eltérés minimalizálásával nyertük, megtartva a költségmonotonitást, a rangtulajdonságot és a szubvenció-mentességet.

A következő tételünk szerint ugyanezt az eredményt megkaphatjuk úgy is, ha egyszerűen a költségelosztás során kapott legnagyobb értéket minimalizáljuk. Ha a hasznosságot negatív költségekben mérjük, a probléma ekvivalens lesz a rawlsi jólét maximalizálásával (amit a társadalomban elfogadott legkisebb hasznosságban mérünk). A mi esetünkben ugyanis a rawlsi jólét maximalizálása egyenértékű az  $n$ -edik felhasználóra eső költségek minimalizálásával. Így tehát a korlátozott átlag szerinti költségelosztási szabály felfogható úgy, mint kollektív törekvés a társadalmi jólét maximalizálására, egyenlőségi alapon.

**3.2. TÉTEL.** *A korlátozott átlag szerinti költségelosztási szabály az egyetlen költségmonoton, rang-tulajdonságú, szubvenciómentes költség mechanizmus, ami maximális rawlsi jólétet biztosít.*

*Bizonyítás.* A bizonyítás a 3.1. tétel bizonyításával analóg módon történik. A bizonyítás utolsó lépésében kapott  $\xi_i(c) > \xi_i^r(c) = \mu_n$  összefüggés egyben azt is jelenti, hogy a rawls-i jólét a  $\xi$  elosztás esetén nem lehet maximális, amivel szintén ellentmondásra jutunk.  $\square$

A tétel összehasonlítható Dutta és Ray [3] cikkében megfogalmazott „egalitárius” elosztással, amely konvex játékok esetén a mag egy speciális eleme lesz.

A korlátozott átlag szerinti elosztásnak egy további, olyan tulajdonságát vizsgáljuk meg, ami költségelosztások esetén szintén hozzájárul ahhoz, hogy az „igazságosságot” árnyaltabban tudjuk kifejezni. Kimondunk tehát egy újabb axiómát, mely azt a célt szolgálja, hogy a felhasználók egy olyan csoportja, amely eddig „támogatásban” részesült, egy esetleges költségnövekedés esetén szintén köteles legyen részt vállalni az újonnan felmerülő költségekből. Ezen axióma és a 3.3. tétel Aadland és Kolpin [1] láncrea megfogalmazott eredményei:

**3.1. Axióma.**  $\xi$  kielégíti a kölcsönösség axiómáját, ha  $\forall i$ -re

$$(a) \sum_{h \leq i} \xi_h(c) \leq \sum_{h \leq i} c_h$$

$$(b) c' \geq c \text{ és}$$

$$(c) \sum_{h \leq i} (c_h - \xi_h(c)) \geq \sum_{j > i} (c'_j - c_j)$$

teljesülése esetén nem igaz, hogy  $\xi_h(c') - \xi_h(c) < \xi_j(c') - \xi_j(c) \quad \forall h \leq i \text{ és } j > i$  esetén.

A kölcsönösségi axióma azt fejezi ki, hogy ha (a) az  $\{1, \dots, i\}$  felhasználók élveznek (akár alacsony) támogatást, (b) a költségek  $c$ -ről  $c'$ -re nőnek, és (c) amennyiben a plusz költségek kollektíve magasabbak az  $i$  utáni szegmensen, mint amekkora támogatást az  $\{1, \dots, i\}$  csoport élvez, méltánytalan lenne, ha a támogatott csoport tagjai kisebb költségnövekedésre számíthatnának, mint az őket támogató  $\{i + 1, \dots, n\}$  szegmens. Intuitíve tehát, amíg az  $\{i + 1, \dots, n\}$  felhasználók költségnövekedése nem haladja meg az  $\{1, \dots, i\}$  felhasználóknak nyújtott támogatást, a támogatottak legalább egy kevés tartozással bírnak a támogató csoporttal szemben. A kölcsönösség axiómája biztosítja, hogy a támogató csoportban legalább egy felhasználó esetén az adott felhasználóra eső költségnövekmény ne haladja



meg a támogatott csoportban a legmagasabb költségnövekményű felhasználóra eső értéket.

**3.3. TÉTEL.** (Aadland és Kolpin, 1998) *A korlátozott átlag szerinti költségelosztási szabály láncok esetén költségmonoton, rang-tulajdonságú, szubvenciómentes és kielégíti a kölcsönösség axiómáját.* [1]

#### 4. A soros költségosztás további tulajdonságai

Problémánk kapcsán a soros költségosztási szabály szintén kiemelkedő jelentőségű. Ebben a részben tehát ezen elosztás további tulajdonságait mutatjuk be, az axiómák és tételek alapját Aadland és Kolpin [1] cikke adja.

**4.1. Axióma.**  $\xi$  szemi-marginális, ha  $\forall i \in N \setminus \mathcal{L}$ -re  $\xi_{i+1}(c) \leq \xi_i(c) + c_{i+1}$ , ahol  $i + 1$  jelöli az  $i$  egy közvetlen rákövetkezőjét  $I_i^+$ -ban.

**4.2. Axióma.**  $\xi$  növekvően szubvenciómentes, ha  $\forall i \in N$  és  $c \leq c'$  esetén

$$\sum_{h \in I_i^- \cup \{i\}} (\xi_h(c') - \xi_h(c)) \leq \sum_{h \in I_i^- \cup \{i\}} (c'_h - c_h).$$

A szemi-marginális azt jelenti, hogy ha  $\xi_i(c)$  az  $I_i^- \cup \{i\}$  csoportra nézve „igazságos” elosztás, akkor az  $i + 1$ -edik felhasználónak semmiképpen ne kelljen többet fizetnie, mint  $\xi_i(c) + c_{i+1}$ . A növekvő szubvenció-mentesség a  $\xi(c)$ -ből kiindulva azért felel, hogy költségnövekedés esetén a felhasználók egyetlen csoportja se fizessen többet, mint a kollektív többletköltség.

**4.1. TÉTEL.** *A soros költségosztási szabályt a költség-monotonitás, a rang-tulajdonság, a szemi-marginális és a növekvő szubvenció-mentesség karakterizálja.*

**Bizonyítás.** A soros elosztás konstrukciójából kiindulva könnyen meggondolható, hogy a soros költségosztás eleget tesz a fenti tulajdonságoknak. Tegyük fel, hogy létezik egy  $\xi^s$ -től különböző  $\xi$  elosztás, ami szintén eleget tesz a feltételeknek. Azt fogjuk belátni, hogy ekkor  $\xi^s = \xi$ . Legyen  $J$  egy részfa, és jelölje  $c^J$  a következő költségvektort:  $c_j^J = c_j$ , ha  $j \in J$ , különben legyen 0.

1. Először azt fogjuk megmutatni, hogy  $\xi(c^0) = \xi^s(c^0)$ , ahol 0 jelöli a csupán egyetlen gyökekből álló fát. Két egymást közvetlenül megelőző  $i < j$  pontra  $\xi_i(c^0) \leq \xi_j(c^0)$  a rangtulajdonság miatt, illetve  $\xi_i(c^0) + c_j^0 \geq \xi_j(c^0)$  a szubvenció-mentesség miatt. Továbbá  $c_j^0 = 0$ . Ezek alapján  $\xi(c^0)$  mindenütt egyenlő, azaz megegyezik  $\xi^s(c^0)$ -l.
2. A következő lépésben belátjuk, hogy ha egy  $J$  részfára  $\xi(c^J) = \xi^s(c^J)$ , akkor a részfat egy olyan  $j$ -vel bővítve, amire  $J \cup \{j\}$  is részfa, szintén

azt kapjuk, hogy  $\xi(c^{J \cup \{j\}}) = \xi^s(c^{J \cup \{j\}})$ . Így indukcióval eljuthatunk a  $c^N = c$  esethez, vagyis megkapjuk, hogy  $\xi(c) = \xi^s(c)$ .

Azt kell tehát belátni, hogy  $\xi(c^{J \cup \{j\}}) = \xi^s(c^{J \cup \{j\}})$ . A monotonitás miatt mindenütt  $\xi_h(c^J) \leq \xi_h(c^{J \cup \{j\}})$ . Most alkalmazzuk a növekvő szubvenciómentességet a  $H = N \setminus j \setminus I_j^+$  halmazra! Ekkor

$$\sum_{h \in H} (\xi_h(c^{J \cup \{j\}}) - \xi_h(c^J)) \leq \sum_{h \in H} (c^{J \cup \{j\}} - c^J).$$

Mivel azonban a  $H$  halmazon  $c^{J \cup \{j\}} = c^J$ , ezért az egyenlőtlenség jobb oldala 0. A monotonitással összevetve azt kapjuk, hogy  $\xi_h(c^J) = \xi_h(c^{J \cup \{j\}})$ ,  $\forall h \in H$ -ra. Ezen a halmazon viszont  $\xi^s$  sem változott, vagyis

$$\xi_h(c^{J \cup \{j\}}) = \xi_h^s(c^{J \cup \{j\}}).$$

A  $\{j\} \cup I_j^+$  halmazra pedig az első pontban leírtakat alkalmazva a rangtulajdonságból és a szemi-marginalitásból következik, hogy ezen a halmazon  $\xi$  mindenütt egyenlő, vagyis megegyezik az átlaggal. Így ezen a halmazon is megegyezik  $\xi^s$ -sel.

□

**4.2. TÉTEL.** *A soros költségelosztási szabály az egyetlen költségmonoton, rangtulajdonságú és növekvően szubvenciómentes mechanizmus, ami maximális rawlsi jólétet biztosít.*

*Bizonyítás.* Könnyen meggondolható, hogy a soros költségelosztás teljesíti a tételben elvárt tulajdonságokat. Most tegyük fel, hogy  $\xi^s$ -en felül ez egy tőle különböző  $\xi$ -re is igaz. Tekintsük most azt a  $c$  költséget, amire  $\exists i$ , hogy  $\xi_i(c) > \xi_i^s$ , emellett  $c$  az ilyen költségek között legyen olyan, ahol a  $c_i \neq 0$  költségek száma minimális. Legyen  $i$  a fában olyan, amire  $\xi_i(c) > \xi_i^s$ .

A  $c$  költséget a következőképpen csökkentjük: keresünk egy olyan  $c_j \neq 0$  költséget, amire  $j \notin I_i^- \cup \{i\}$ , vagyis  $j$  nem az  $i$  előtti láncból való.

1. Ha ilyen létezik, akkor  $c_j$ -t lecsökkentjük 0-ra, és az így kapott  $c'$ -t vizsgáljuk. A 4.1. tétel 2. pontjához hasonlóan a  $H = I_i^- \cup \{i\}$  láncban a költségmonotonitás miatt  $\xi_h(c') \leq \xi_h(c)$ . A növekvő szubvenciómentesség miatt pedig a láncban nincs változás. Azaz  $\xi_i(c') = \xi_i(c) > \xi_i^s(c) = \xi_i^s(c')$ , vagyis  $c$ -ben a nem 0-ák száma nem volt minimális, ami ellentmond  $c$  választásának.
2. Eszerint a minimális nem 0-ás ellenpélda egy olyan költséghez tartozik, ahol az  $I_i^- \cup \{i\}$  halmazon kívül minden  $c_j = 0$ . A rangtulajdonság miatt  $\forall j \in I_i^+$ -ra  $\xi_j(c) \geq \xi_i(c) > \xi_i^s(c) = \xi_j^s(c)$ . Utóbbi egyenlőség a soros költségelosztás konstrukciójából következik, mivel  $I_i^+$ -on mindenütt  $c_j = 0$ . Egy olyan fában, ahol  $c_j$  csak  $i$ -ben és  $I_i^-$ -ben lesz 0-tól különböző, a legnagyobb soros költségelosztás a  $\xi_i^s(c)$  lesz. A rawlsi jólét maximalizálása

a legnagyobb szétoztott költség minimalizálásával egyezik meg, így a  $\xi$  szétoztás ezt a tulajdonságot nem teljesítheti, mert  $\xi_i^s(c) < \xi_i(c)$ .  $\square$

A tétel szerint tehát a soros költségelosztás egy jólét-maximalizálás végeredményeként kapható meg.

**4.3. TÉTEL.** *A soros költségelosztási szabály az egyetlen költségmonoton, rangtulajdonságú, szemi-marginális mechanizmus, ami minimális ralwsi jólétet biztosít.*

*Bizonyítás.* Könnyen látható, hogy a soros költségelosztás kielégíti a tétel feltételeit. Tegyük fel most, hogy ez ugyanígy igaz a  $\xi^s$ -től különböző  $\xi$ -re is. Tekintsük továbbá azt a költséget, ahol  $\exists i$ , hogy  $\xi_i(c) < \xi_i^s(c)$ , emellett  $c$  olyan, hogy benne a  $c_j \neq 0$  típusú költséges száma minimális.

A  $c$  költséget a következőképp csökkentjük: keresünk egy olyan  $c_j \neq 0$  költséget, amire  $j \notin I_i^- \cup \{i\}$ , majd  $c_j$ -t 0-ra csökkentjük. Az így kapott  $c'$  költségre  $\xi_i^s(c') = \xi_i^s(c) > \xi_i(c) \geq \xi_i(c')$ , utóbbi egyenlőtlenség a költség-monotonitás miatt áll fenn. Így kapjuk, hogy  $\xi_i^s(c') > \xi_i(c)$ , ami ellentmond  $c$  választásának. Tehát ilyen  $c_j$  nem létezik, csak az  $I_i^- \cup \{i\}$ -beliekre lehetnek  $c_j \neq 0$  értékek.

Ekkor a rang-tulajdonság miatt az  $I_i^- \cup \{i\}$  láncban a legnagyobb  $\xi_j$  érték az  $i$ -hez tartozik. Mivel a láncon kívül  $\forall c_j = 0$ , ezért a rang-tulajdonság és a szemi-marginalitás miatt (a 4.1. tétel 1. része alapján) a láncon kívül  $\xi_j(c)$  mindenütt a  $j$ -t megelőző utolsó láncbeli  $h$ -ra vonatkozó  $\xi_h(c)$ -vel egyezik meg. A soros elosztás konstrukciója miatt  $c$ -re szintén  $\xi_i^s(c)$  a legnagyobb. A ralwsi-jótél minimalizálása a legnagyobb szétoztott költség maximalizálásával egyezik meg, így  $\xi_i(c) < \xi_i^s(c)$  miatt a  $\xi$  nem lehet ralwsi minimum.  $\square$

Nyilvánvaló, hogy a korlátozott átlag szerinti költségelosztási elv szemi-marginális, a soros pedig szubvenciómentes. Összegzésül tehát mindkét mechanizmus költségmonoton, rang-tulajdonságú, szubvenciómentes, szemi-marginális, és amíg a korlátozott átlag szerinti költségelosztási elv maximalizálja a ralwsi jólétet, addig a soros éppen hogy minimalizálja azt. Így tehát a korlátozott átlag szerinti elosztási elv a főcsatorna hátsó felén, míg a soros költség-elosztási elv a főcsatorna elején elhelyezkedő felhasználóknak kedvez.

## 5. Súlyozott költségelosztások

Ebben a szakaszban a korlátozott átlag szerinti és a soros elosztási elvek hektárkénti és víz-részesedés szerinti súlyozott változatát vizsgáljuk meg. Ezek a verziók leírhatók a felhasználóként tárgyalt eset analogonjaként. Az itt szereplő definíciók és tételek alapját Aadland és Kolpin [1] cikke adja.

Jelöljük ki minden felhasználóhoz egy  $w_i > 0$  súlyt, ezen súly megfeleltethető az öntözött hektárnak, a felhasznált vízmennyiségnek (ez tekinthető a teljes

vízkezelés azon hányadának, mely az adott felhasználóra esik), vagy akár egyéb mértékeknek. Tekintsük az alábbi definíciót!

**5.1. Definíció.** Az  $\omega : \mathbb{R}_+^N \rightarrow \mathbb{R}_+^N$  egy  $w$ -súlyozott költségelosztási szabály, ha  $\forall c \in \mathbb{R}_+^N$ -re  $\sum \omega_i(c)w_i = \sum_i c_i$ .

(a) Az átlag szerinti  $w$ -súlyozott költségelosztási szabály szerint

$$\omega_i^a(c) = \frac{\sum_{j \in N} c_j}{\sum_{j \in N} w_j} \quad \forall j \in N\text{-re.}$$

(b) A soros  $w$ -súlyozott költségelosztási szabály szerint

$$\omega_i^s(c) = \sum_{j \in I_i^- \cup \{i\}} \frac{c_j}{\sum_{l \in I_j^+ \cup \{j\}} w_l}.$$

*Megjegyzés.* Lánc esetén pedig

$$\omega_i^s(c) = \frac{c_1}{\sum_{j \geq 1} w_j} + \frac{c_2}{\sum_{j \geq 2} w_j} + \dots + \frac{c_i}{\sum_{j \geq i} w_j} \quad \forall i \in N.$$

Az átlag szerinti  $w$ -súlyozott esetben az összköltség egyenlően oszlik meg minden egységnyi súlyon, míg a soros  $w$ -súlyozott elosztás szerint a költséget az egyes szegmensekre nézve osztjuk el egyenlő módon (egységnyi súlyok szerint) azok között a felhasználók között, akik az adott szegmenst igénybe veszik. Tekintsük a korábban már vizsgált példánkat láncra, ahol  $N = \{1, 2, 3\}$  és  $c = \{6, 1, 5\}$ . Feltehető továbbá, hogy  $w = \{1, 2, 3\}$ . Ezek alapján kiszámolható, hogy  $\omega^a(c) = (2, 2, 2)$ , míg  $\omega^s(c) = (1; 1, 2; 2, 86)$ , a költségek pedig  $c^a = (2, 4, 6)$  és  $c^s = (1; 2, 4; 11, 44)$ .

Mint azt a korábbi (felhasználónkénti) esetben tapasztaltuk, az átlag szerinti  $w$ -súlyozott elosztás nem fogja kielégíteni az összes szükséges axiómát, mégpedig a szubvenció-mentesség súlyozott megfelelőjét. Ismét egy korlátozott átlag szerinti elosztáshoz folyamodunk, melynek definiálása a korábbi esettel analóg módon történik, a megfelelő „súlyozott” axiómák bevezetése után.

**5.1. Axióma.** Az  $\omega$   $w$ -súlyozott költségelosztási szabály

- költségmonoton, ha  $\omega(c) \leq \omega(c') \quad \forall c \leq c'$ -re,
- rang-tulajdonságú, ha  $\omega_i(c) \leq \omega_j(c) \quad \forall c \in (R)_+^N$  és  $\forall i \in I_j^- \cup \{j\}$ ,
- szubvenciómentes, ha  $c \in \mathbb{R}_+^N$  és  $\forall I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq N$  esetén (ahol az egyszerűség kedvéért  $J := I_{i_1}^- \cup \dots \cup I_{i_k}^- \cup I$ )

$$\sum_{j \in J} \omega_j(c)w_j \leq \sum_{j \in J} c_j.$$

*Megjegyzés.* Lánc esetén pedig  $j \in J$  pontosan akkor teljesül, ha  $j \leq i$ , ekkor tehát elég annyit írni, hogy  $\forall i \in N$  esetén

$$\sum_{j \leq i} \omega_j(c) w_j \leq \sum_{j \leq i} c_j.$$

A következő axiómákat a korábbi alfejezethez hasonlóan ismét csak lánc esetére mondjuk ki.

**5.2. Axióma.** Az  $\omega$   $w$ -súlyozott költségelosztási szabály

- kielégíti a kölcsönösségi axiómát, ha  $c \leq c'$ -re

$$\sum_{h \leq i} \omega_h(c) w_h \leq \sum_{h \leq i} c_h \quad \text{és}$$

$$\sum_{h \leq i} (c_h - \omega_h(c) w_h) \geq \sum_{j > i} (c'_j - c_j)$$

esetén nem igaz, hogy  $\omega_h(c') - \omega_h(c) < \omega_j(c') - \omega_j(c) \quad \forall h \leq i$  és  $j > i$ -re,

- szemi-marginális, ha  $\omega_{i+1}(c) \leq \omega_i(c) + \frac{c_{i+1}}{w_{i+1}}, \quad \forall i = 1, \dots, n-1$ -re,
- növekvően szubvenciómentes, ha  $\forall i \in N$ -re és  $c \leq c'$  esetén

$$\sum_{j \leq i} (\omega_j(c') - \omega_j(c)) w_j \leq \sum_{j \leq i} (c'_j - c_j).$$

**5.2. Definíció.** Egy korlátozott átlag szerint  $w$ -súlyozott költségelosztási szabály olyan költségmonoton, rang-tulajdonságú, szubvenciómentes  $w$ -súlyozott mechanizmus, ahol az eltérés a legmagasabb és a legalacsonyabb súlyozottan szétosztott költségek között a lehető legkisebb, az összes elosztási elvet tekintve.

Korábbi eredményeink a láncokra átfogalmazhatók a  $w$ -súlyozott esetre is, adott súlyozás esetén minden egyes súly formálisan megfeleltethető a felhasználónkénti költségekkel. Ezért korábbi tételeink egyszerűen így foglalhatók össze:

**5.1. TÉTEL.** (Aadland és Kolpin, 1998) Az 3.1., 3.3., 3.2., 4.1., 4.2., 4.3. tételek láncokra vonatkozóan érvényben maradnak a  $w$ -súlyozott költségelosztási szabályok esetében is. [1]

## Hivatkozások

- [1] D. AADLAND AND V. KOLPIN: *Shared irrigation cost: An empirical and axiomatic analysis*. Mathematical Social Sciences, 849:203–218, 1998.
- [2] D. AADLAND AND V. KOLPIN: *Environmental determinants of cost sharing*. Journal of Economic Behavior & Organization, 53:495–511, 2004.
- [3] B. DUTTA AND D. RAY: *A concept of egalitarianism under participation constraints*. Econometrica, 57(3):615–635, 1989.
- [4] A. RADVÁNYI: *Költségelosztási modellek. (diplomamunka)*. [http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/mat/2010/radvanyi\\_anna\\_rahel.pdf](http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/mat/2010/radvanyi_anna_rahel.pdf), 2010.
- [5] T. SOLYOSI: *Kooperatív játékok. (elektronikus jegyzet)*. <http://web.uni-corvinus.hu/opkut/files/koopjatek.pdf>, 2007.
- [6] PHILIP D. STRAFFIN AND JAMES P. HEANEY: *Game Theory and the Tennessee Valley Authority*. International Journal of Game Theory, 10(1):35–43, 1981.

(Beérkezett: 2011. március 25.)

RADVÁNYI ANNA  
 Budapesti Corvinus Egyetem  
 Matematika Tanszék  
 1093 Budapest, Fővám tér 13-15.  
 e-mail: anna.radvanyi@uni-corvinus.hu

KOVÁCS GERGELY  
 Edutus Főiskola  
 Közgazdasági és Módszertani Alapozó Tanszék  
 2800 Tatabánya, Stúdium tér 1.  
 e-mail: kovacs.gergely@edutus.hu

## COST-SHARING MODELS

GERGELY KOVÁCS AND ANNA RADVÁNYI

In this paper we consider cost-sharing models for which the basis is a real-world economic problem regarding irrigation. There is given an irrigation ditch joined to the stream by a head-gate and a group of users who use this ditch to irrigate their own farms. The functional and maintenance costs of the ditch are given too, and they have to be paid for by the users. One of the main questions is how to share the costs among the users. A cost-sharing rule defines how much each user has to pay to allocate the total cost. This allocation must be regarded "fair" by all users.

We explore the concept of cost-sharing, consider its expected properties and modelling opportunities, and evaluate the different solutions. In this paper we generalize Aadland and Kolpin's (Mathematical Social Sciences, 1988) results on chains to ditch-systems represented by rooted trees. We complete our study with other models also stemming from the Tennessee Valley Authority's (TVA) water farming problems. TVA was formed in 1933 to develop the economic expansion of Tennessee Valley. The results and methods based upon TVA's separated and non-separated cost models were first introduced by Straffin and Heaney (International Journal of Game Theory, 1981).

## LIE-SZIMMETRIÁK EGY KÖZGAZDASÁGI ALKALMAZÁSA<sup>1</sup>

MÓCZÁR JÓZSEF ÉS MÁRKUS FERENC

### 1. Bevezetés

Egy fizikai rendszer időbeli fejlődése bizonyos esetekben nagyon elegánsan megfogalmazható a legkisebb hatás elvével. A matematikai leírás középpontjában a koordináták és sebességek speciális függvénye, az ún. Lagrange-függvény áll. Ez a fizika tudományában oly hatásos módszer alkalmazható lehet akár az analóg közgazdasági dinamikai rendszerekre is. Ekkor a rendszer egy extrémális pályát követ a fázistérben úgy, hogy a Lagrange-függvény integrálja stacionárius. Látni fogjuk, hogy a Lagrange-függvény tetszőleges Lie-szimmetriái megfelelnek egy-egy állandó mennyiségnek, a megmaradási elvet pedig egy variációs szimmetria magyarázza, amely egy dinamikai vagy geometriai szimmetriához kapcsolható.

Ebben a tanulmányban ismertetjük a Nöther-tétel lényegi vonatkozásait, és kitérünk a Lie-szimmetriák értelmezésére abból a célból, hogy közgazdasági folyamatokra is alkalmazzuk a Lagrange-formalizmuson nyugvó elméletet. A Lie-szimmetriák dinamikai rendszerekre történő feltárása és viselkedésük jellemzése a legújabb kutatások eredményei e területen. Például Sen és Tabor (1990), Edward Lorenz (1963), a komplex kaotikus dinamika vizsgálatában jelentős szerepet betöltő 3D modelljét, Baumann és Freyberger (1992) a két-dimenziós Lotka-Volterra dinamikai rendszert, és végül Almeida és Moreira (1992) a három-hullám interakciós problémáját vizsgálták a megfelelő Lie-szimmetriák segítségével. Mi most empirikus elemzésre egy közgazdasági dinamikai rendszert választottunk, nevezetesen Goodwin (1967) ciklusmodelljét. Ennek vizsgálatát tűztük ki célul a leírandó rendszer Lie-szimmetriáinak meghatározásán keresztül.

Ismert, hogy a Lotka-Volterra ökológiai rendszer (Lotka (1925), Volterra (1931)) és Goodwin (1967) vele analóg növekedési ciklusmodelljének megoldásgörbéi, a zárt elliptikus pályák, közvetlenül megadhatók egy speciális Ljapunov-függvény segítségével (Hirsch-Smale, 1974). Viszont maga Goodwin az első integrál fogalmát használta fel közgazdasági modelljének megoldásgörbéi meghatározásában, de kellő magyarázat hiányában, a közgazdászok előtt mindvégig homály fedte az első integrál fizikai kötődését, a Lagrange-struktúrából történő származtatását. Sem az 1967-es tanulmányában, sem a későbbi írásokban sem Goodwin, sem más ez idáig

<sup>1</sup>A szerzők köszönetüket fejezik ki az anonim lektornak a dolgozat elkészítése során nyújtott értékes megjegyzéseiről és javaslatairól

nem mutatta meg, hogy dinamikai rendszere rendelkezik Lagrange-struktúrával, és a megfelelő Lie-szimmetriával áll elő a kérdéses első integrál, vagy másképpen nevezve, a Hamilton-függvény, azaz a dinamikai folyamat egy megmaradó mennyisége. Szigorúan didaktikai szempontok miatt, kihasználva az egyszerűbb Lotka–Volterra-modell és a bonyolultabb Goodwin-modell ekvivalenciáját, párhuzamos<sup>2</sup> levezetésekkel jutunk el a megfelelő Lie-szimmetriákhoz.

Az a célkitűzésünk, hogy az elméleti vizsgálatainkat követő empirikus elemzéseinkben megmutassuk, hogy Goodwin 2D dinamikai rendszerének is van Lagrange struktúrája, következésképpen a Nöther-tétel itt is alkalmazható, és a megfelelő dinamika kvalitatív értelemben egyértelmű. Ebben felhasználjuk Fernández-Núñez (1998) eredményeit is. A Lie-szimmetriákat és a Lotka–Volterra-modellre kapott első integrálokat vagy másképp Hamilton-függvényeket, azonban tőle eltérően származtatjuk le. Az általa alkalmazott módszerben a Lagrange-függvény előállításához a modell paramétereiben erős matematikai megszorításokat kívánt meg. Ez azonban lehetetlenné teszi az ún. skálázott Lotka–Volterra-modelljének ökológiai magyarázatát, csak úgy, mint a Goodwin-modell közgazdasági értelmezését. Mindazonáltal e megközelítés, a Nöther-tételen keresztül, nemcsak relevanciát, hanem eleganciát is mutat, mivel szabadon használhatjuk mind a klasszikus (nem relativisztikus) mechanika, mind a matematikai irányításelmélet nyelvezetét, illetve fogalmi rendszerét.

Tanulmányunkat a következőképpen rendeztük. A 2. szakaszban a Lagrange-elméletet mutatjuk be. A 3. szakaszban elemezzük Nöther tételét és a vele kapcsolatos megmaradási törvényeket, majd ezt követően a 4. szakaszban definiáljuk az alapvető Lotka–Volterra-rendszer Lagrange-függvényét. Az első integrál a Nöther-tételben feltételezi a mozgási egyenletek Lie-szimmetriáit, amelyeket az 5. szakaszban írunk le. A 6. szakaszban felvázoljuk a Goodwin-modellt. A következőkben, 7., 8. és 9. szakaszokban, megmutatjuk az ekvivalenciát a Goodwin-modell és a Lotka–Volterra-rendszer között, megadjuk a modell Lagrange- és Hamilton-függvényeit, Lie-szimmetriáit, és végül a kapott eredmények közgazdasági értelmezését a megfelelő következtetésekkel együtt.

## 2. A Lagrange-elmélet

A dinamikai szimmetriák és a megmaradási elvek közötti kapcsolatra elsőként Nöther (1918) állított fel egy általános érvényességű tételt. Ennek szellemében általában is igaz, hogy a Lagrange-függvény bármely szimmetriája megfelel egy megmaradó mennyiségnek, és vice versa. Ezt egy nagyon egyszerű példával szemléltethetjük. Vegyük az  $m$  tömegű szabad részecske klasszikus Lagrange-függvényét, ami egyszerűen  $L = (1/2)m\dot{x}^2$ . Látható, hogy az  $L$  csak az  $\dot{x}$  sebességtől függ, és függet-

<sup>2</sup>Ezt megkönnyíti Goodwin (1967) tanulmánya is, mivel modelljének kifejtésében szorosan követte a Lotka–Volterra modell logikáját. Harvie (2000) tanulmányából tudjuk, hogy a genetikus J. B. S. Haldane hívta fel Goodwin figyelmét a híres ökológiai modellre.



len az  $x$  helytől, azaz a térbeli eltolással szemben invariáns. Így a  $dL/dx = 0$ , azaz, az  $L$  szimmetrikus az  $x$ -en keresztül. Ebből következik, hogy az Euler–Lagrange-egyenlet<sup>3</sup> alapján  $p = \partial L/\partial \dot{x} = m\dot{x}$  konstans, vagyis a  $p$  impulzus megmaradó mennyiség.

A Lagrange-függvény határozza meg a dinamikai rendszer mozgáspályáit. A kapcsolódó Lie-szimmetriák olyanok, hogy az integrál-funkcionál függő és független változóinak infinitezimális transzformációi mellett változatlanul hagyják a teljes struktúrát. Ezt az invarianciát az irodalomban időnként variációs szimmetriának is nevezik. Vizsgálatainkban különös figyelmet fordítunk az ún. dinamikai szimmetriára, amely nem a koordináta transzformációkkal kapcsolatos geometriai szimmetria, és amely ugyancsak fontos lesz a Nöther-tétel megértésében.

Meg kell említenünk azt az ismert tényt [Wigner (1954)], hogy nem mindegyik dinamikai rendszerhez adható meg Lagrange-függvény, s ennek következtében a Nöther-tétel nem alkalmazható. Továbbá, egy adott Lagrange-függvény esetén a Nöther-féle variációs szimmetria adott megmaradási elvekre vezet. Ugyanakkor egy dinamikai rendszerhez többféle (és nem csak egy időderivált tagban különböző) olyan Lagrange-függvény is megadható, amelyek Euler–Lagrange-egyenletei a kérdéses dinamikai rendszert eredményezik, de integrál-funkcionáljukat infinitezimálisan transzformálva nem feltétlenül viselkednek ekvivalensen.

Tekintsük például a két-dimenziós harmonikus oszcillátor esetét, amelyre Morandi et al. (1990, 203. o.) két különböző Lagrange-függvényt is meghatároznak:

$$L_1 = \frac{1}{2} \left[ \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \omega^2 (q_1^2 + q_2^2) \right] \quad (1)$$

és a kevésbé ismert lehetséges választás

$$L_2 = \dot{q}_1 \dot{q}_2 - \omega^2 q_1 q_2. \quad (2)$$

Mindenesetre a  $q_1$  és  $q_2$  változókra<sup>4</sup> vonatkozó Euler–Lagrange-egyenletek (mozgásegyenletek) ugyanazok mindkét Lagrange-függvény esetében:

$$\ddot{q}_1 + \omega^2 q_1 = 0, \quad (3a)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 = 0. \quad (3b)$$

Felvetődik ugyanakkor a jogos kérdés, hogy a két lehetséges megfogalmazás ekvivalens-e, és ha nem, akkor melyik biztosítja a ténylegesen alkalmas leírást? Látható, hogy a mozgásegyenletek származtatása alapján nincs egyértelmű válasz. A fizikai problémák vizsgálata során segítségül hívhatók az impulzusra, impulzusmomentumra, energiára, de akár elektromos töltésre, lepton-számra, barion-számra stb. vonatkozó megmaradási tételek.

Jelen eseteket megvizsgálva látható, hogy a véges  $\theta$  szögű

$$q'_1 = q_1 \cos \theta - q_2 \sin \theta \quad (4a)$$

$$q'_2 = q_1 \sin \theta + q_2 \cos \theta \quad (4b)$$

<sup>3</sup>Lásd később a (8) egyenletet.

<sup>4</sup>Általában érvényes, hogy az extremalizálandó függvényekre:  $q(t) \in C^2$ .

$O(2)$  forgatásokkal szemben az (1) egyenlettel megadott Lagrange-függvény invariáns<sup>5</sup>. Másrészt az is igaz, hogy ezzel a transzformációval szemben a (2) Lagrange-függvény nem marad változatlan<sup>6</sup>. Ha viszont a  $\theta$ -ra kikötjük, hogy infintezimális mennyiség lehet, azaz  $\theta \ll 1$ , akkor a  $\cos \theta \sim 1$  és  $\sin \theta \sim 0$  közelítéssel élve a (2) Lagrange-függvény is invariáns marad<sup>7</sup>. Mivel az infintezimális forgatások az impulzusmomentum megmaradásával vannak szoros kapcsolatban (lásd később a 3. szakaszt), ezért megállapíthatjuk, hogy e fontos megmaradási tétel mindkét Lagrange-függvényben jelen van.

Érdekes észrevenni, hogy a

$$q_1' = e^\eta q_1, \quad (5a)$$

$$q_2' = e^{-\eta} q_2 \quad (5b)$$

egyfajta összenyomást kifejező az  $\eta$  véges paraméterű transzformációval szemben a (2) Lagrange-függvény invariáns, míg az (1) Lagrange-függvény nem, és ez az  $\eta \rightarrow 0$  határesettel sem érhető el<sup>8</sup>. Ezért, ha ez a transzformáció az egyik esetben hordoz is valamiféle értelmet, és levonható esetleg egy megmaradási tétel léte, a másik esetben biztosan nem jelent semmit.

Végül meg kell jegyezzük, hogy az  $L_1$  Lagrange-függvény egy-dimenziós esetekre is azonnal alkalmas mozgásegyenletet szolgáltat a  $q_2 = 0$  választással, míg a másik esetben ez a lépés egyszerűen azonosan zérussá teszi az  $L_2$ -t. Ott a két szabadsági fok együttes megléte a leírásban alapvető követelmény.

Legelső feladatunk az, hogy megmutassuk, hogy ha egy dinamikai rendszernek van Lagrange struktúrája és első integrálja, akkor ez utóbbi valóban egy olyan Hamilton-függvény vagy megmaradó mennyiség, ami megfelel a kérdéses Lagrange-függvény Lie szimmetriájának. Ehhez szükségünk lesz Nöther tételére is, amit most vázlatosan levezetünk.

### 3. A Nöther-tétel és a megmaradási törvények

Már fizikai tanulmányainkból is tudjuk, hogy Nöther tétele bármely más tudományterületen hasznos lehet, ha ott a kérdéses probléma variációs elvvel megfogalmazható. A tétel összekapcsolja az

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt \quad (6)$$

integrál-funkcionál (hatás) invariáns tulajdonságait a megmaradási törvényekkel, azaz a megfelelő Euler-Lagrange- vagy Hamilton-differenciálegyenletek integrál-

<sup>5</sup> Ennek belátása azon alapszik, hogy fennáll:  $q_1'^2 + q_2'^2 = q_1^2 + q_2^2$ .

<sup>6</sup> Belátható, ha tekintjük:  $q_1' q_2' = q_1 q_2 \cos^2 \theta - q_1^2 \sin \theta \cos \theta + q_2^2 \sin \theta \cos \theta - q_1 q_2 \sin^2 \theta$ .

<sup>7</sup> Az infintezimális  $\theta$  szögű forgatások esetén:  $q_1' q_2' = q_1 q_2$ .

<sup>8</sup> Az  $\eta = 0$  eset az identitás transzformációnak felel meg.

jaival. Így az impulzus (mozgásmennyiség) és az impulzusmomentum megmaradása a mechanikában rendre megfelel a fenti integrál-funkcionál térbeli eltolási és forgási invarianciájának, míg az időbeli eltolási invarianciája az energiamegmaradáshoz kapcsolódik. Az idő- és térváltozók szerinti eltolási és forgási invarianciákat geometriai invarianciáknak is nevezik. Ezekbe újabb és mélyebb betekintést nyerhetünk, ha feltárjuk a Lagrange-függvény és a belőle nyerhető mozgásegyenletek belső szimmetriáit. Minden egyes független szimmetria a folyamat további megmaradási törvényét adja. Fontos hangsúlyozni, hogy egy bizonyos jelenség leírása a matematika nyelvén történik, ezért nem korlátozhatjuk a Lagrange-függvény megfogalmazását csak fizikai jelenségekre, azaz, sikeresen alkalmazható kémiai, biológiai és közgazdasági folyamatokra is.

A mechanika extrémális elvei alapvető fontosságúak mind a fizikában, mind az optimális irányításelméletben. A kezdeti  $t_1$  és a végső  $t_2$  időpontokban felvett  $q_1$  és  $q_2$  állapotok közötti mozgást vizsgálják. Általában az extrémális pálya kiszámítása a kitűzött feladat. Matematikailag, ha a hatásfüggvény extrémális az optimális (reál) pályára, akkor az integrál-funkcionál a (6) egyenletben nem veheti fel extrémumát egyik variált (perturbált)  $q(t) + \delta q(t)$  pályára sem, legyen az bármilyen közel is az extrémálishoz. Ezt úgy mondjuk, hogy variáljuk a hatásfüggvényt, azaz, az első variációját vesszük az integrál-funkcionálnak:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [L(t, q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \delta \dot{q}(t)) - L(t, q(t), \dot{q}(t))] dt \quad (7)$$

Mindez azt a célt szolgálja, hogy megtaláljuk az extrémum szükséges feltételét, amely mellett  $\delta S = 0$  teljesül. Ez a legkisebb hatás elvét fejezi ki. Alkalmazva a variációszámítás lépéseit (lásd Budó (1964) vagy Móczár (2008)), megkapjuk az Euler–Lagrange-differenciálegyenletet:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}. \quad (8)$$

Ennek az egyenletnek a megoldása adja az extrémális (optimális, valós)  $q(t)$  mozgási pályát<sup>9</sup>.

A Nöther-tétel kifejtése irányába továbblépve, feltesszük, hogy a hatás legyen invariáns mind a  $q(t)$  általános koordináta (pálya-változó), mind a  $t$  időváltozó határon történő együttes infinitezimális eltolásával szemben. Az egyszerűség kedvéért csak a felső határ koordinátáját változtatjuk meg, amit úgy jelölünk, hogy a  $t_2$  helyett  $t + \delta t$ -t írunk. A megváltozott felső határhoz vezető függvényt pedig  $q'$ -vel jelöljük:

$$q'(\tau) = q(\tau) + \zeta(\tau). \quad (9)$$

<sup>9</sup>Megjegyezzük, hogy az Euler–Lagrange-egyenlet a következő explicit formában is megadható:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial q} \dot{q} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \ddot{q} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial t} = 0,$$

így a standard Euler–Lagrange-egyenlet mindig egy másodrendű ODE.

A  $\zeta(\tau)$ -ról feltesszük, hogy infinitezimálisan kis függvény, és teljesíti a  $\zeta(t_1) = 0$  feltevést. Az integrál-funkcionál megváltozása most:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t+\delta t} L(\tau, q', \dot{q}') d\tau - \int_{t_1}^t L(\tau, q, \dot{q}) d\tau \\ &= \int_{t_1}^t L(\tau, q + \zeta, \dot{q} + \dot{\zeta}) d\tau + \\ &\quad + \int_t^{t+\delta t} L(\tau, q + \zeta, \dot{q} + \dot{\zeta}) d\tau - \int_{t_1}^t L(\tau, q, \dot{q}) d\tau.\end{aligned}\quad (10)$$

A középső integrál úgy is írható, mint

$$\int_t^{t+\delta t} L(\tau, q + \zeta, \dot{q} + \dot{\zeta}) d\tau = L(t) \delta t, \quad (11)$$

mivel az integrációs tartománya infinitezimálisan kicsi. Az  $L(\tau, q + \zeta, \dot{q} + \dot{\zeta})$  függvény lineáris közelítését véve a Taylor-sorából, kapjuk:

$$L(\tau, q + \zeta, \dot{q} + \dot{\zeta}) = L(\tau, q, \dot{q}) + \frac{\partial L}{\partial q} \zeta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\zeta}. \quad (12)$$

A (11)-et és (12)-t behelyettesítve (10)-be:

$$\delta S = \int_{t_1}^t \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \zeta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\zeta} \right] d\tau + L(t) \delta t. \quad (13)$$

Az integrál második tagját parciálisan integrálva, kapjuk:

$$\delta S = \int_{t_1}^t \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \zeta d\tau + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \zeta \right]_{t_1}^t + L(t) \delta t. \quad (14)$$

Az integrál az Euler-Lagrange-egyenlet miatt eltűnik, a kiintegrált rész pedig az alsó határon zérus. Ezért a következő egyenletet kapjuk:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \zeta(t) + L(t) \delta t. \quad (15)$$

A  $\zeta(t)$  a felső határ koordinátájának  $\delta q$  megváltozásával írható mint:

$$\delta q = q'(t + \delta t) - q(t) = q(t + \delta t) + \zeta(t + \delta t) - q(t), \quad (16)$$

ahonnan

$$\zeta(t + \delta t) = \delta q - [q(t + \delta t) - q(t)]. \quad (17)$$

A szögletes zárójelben levő mennyiség a differenciálszámítás középérték-tétele alapján  $\dot{q}\delta t$ -vel közelíthető, a  $\zeta(t + \delta t)$  helyett közelítésül írhatunk  $\zeta(t)$ -t a  $\delta t$  és  $\zeta$  kicsiny volta miatt. Azaz,

$$\zeta(t) = \delta q - \dot{q}\delta t. \quad (18)$$

Ezt beírva (14)-be, kapjuk:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q - \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \right] \delta t. \quad (19)$$

Bevezetve a

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (20)$$

jelölést, a szokásos zárójelbeli kifejezés

$$p\dot{q} - L = H(q, p), \quad (21)$$

ami a rendszer Hamilton-függvénye. Az integrál-funkcionál megváltozása végül is:

$$\delta S = p\delta q - H\delta t. \quad (22)$$

Az integrálási tartomány határán történő variálás okán ezt az összefüggést a variációszámítás határképletének is szokás nevezni<sup>10</sup>. Ha a hatás-függvény érzéketlen a határokon tetszőlegesen változtatott  $\delta t$ -re és  $\delta q$ -ra<sup>11</sup>, akkor az azt jelenti, hogy a  $H$  és  $p$  mennyiségek konstansok a mozgás ideje alatt. A kalkulusban az idő szerinti integráljaikat gyakran első integráloknak nevezik. A  $H$  Hamilton-függvény konstans a mozgás alatt, ha a Lagrange-függvény explicite nem függ az időtől, azaz  $L = L(q, \dot{q})$ . Ez a következőképpen látható be, felhasználva az Euler-Lagrange-egyenletet:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} = \dot{q} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} = \frac{d}{dt} \left( \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right). \quad (23)$$

Az első és az utolsó mennyiség közötti egyenlőségből kapjuk:

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \right) = 0, \quad (24)$$

amelyből

$$\dot{q} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} - L(q, \dot{q}) = \text{const} \quad (25)$$

a mozgásegyenlet első integrálja. A fizikában a  $H$  Hamilton-függvényt a rendszer  $E$  energiájával azonosítják, és ez az időeltolással kapcsolatos. A (20)-beli mennyiség a téreltolással kapcsolatos  $p$  impulzus.

Egy harmadik megmaradó mennyiség nyerhető a

$$\frac{\partial L(t, q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \delta q \quad (26)$$

<sup>10</sup> A határképlet definiálja a  $q$  koordinátához és a  $t$  időhöz kanonikusan konjugált mennyiségeket, nevezetesen a (20) képlettel adott általános vagy kanonikus impulzust, illetve a (21) Hamilton-függvény  $(-1)$ -szeresét. Bővebben lásd Nagy (1981).

<sup>11</sup> Megjegyezzük, hogy a (19)  $\delta S = 0$  mellett az optimális irányításméletben az ún. általános transzverzálitási feltételt adja (lásd Móczár (2008) 108. oldal).

alakból, ha vesszük a  $\delta q = \hat{\epsilon}q$  infinitezimális forgatást a 3D térben, ahol  $\hat{\epsilon}$  a forgatás antiszimmetrikus mátrixa. Ekkor az impulzusmomentum megmaradásához jutunk<sup>12</sup>.

E három transzformáció tartozik az elmélet geometriai szimmetriáihoz. Rendkívüli nagy kihívás azonban, hogy megtaláljuk azokat a nem geometriai szimmetriákat, amelyek teljessé teszik e feltevést általában. Ezek a mozgás dinamikai szimmetriái. A matematikai kidolgozás a legtöbb esetben nem egy triviális számolás. Ha a  $q$  változó olyan transzformációját adjuk meg, ami szerint a hatás-függvény variációja zérus marad, akkor az elmélet egy belső szimmetriáját kapjuk meg, ami a megmaradó mozgásmennyiséget eredményezi. A független transzformációk mindegyik ága egy-egy megmaradási törvényt ad. Ez a Nöther-tétel jelentése.

#### 4. Lotka-Volterra 2D dinamikai rendszerének Lagrange-struktúrája

Először a Lotka-Volterra 2D dinamikai rendszerére<sup>13</sup> fókuszálunk:

$$\dot{x} = ax - dyx, \quad (27a)$$

$$\dot{y} = -by + cxy. \quad (27b)$$

Könnyen felismerhetjük, hogy a rendszer Lagrange-függvényét sokkal egyszerűbben megkaphatjuk, ha mindkét egyenletet elosztjuk az  $xy$  szorzattal. Ekkor a következő

<sup>12</sup>Jelölje  $q = (q_x, q_y, q_z)$  a helyvektort, míg a (20) egyenletből  $p = (p_x, p_y, p_z)$  az impulzust. Az infinitezimális forgatást leíró mátrix

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_z & \epsilon_y \\ \epsilon_z & 0 & -\epsilon_x \\ -\epsilon_y & \epsilon_x & 0 \end{pmatrix},$$

amellyel a  $\delta q'$  komponensei rendre

$$\delta q'_x = -\epsilon_z q_y + \epsilon_y q_z$$

$$\delta q'_y = \epsilon_z q_x - \epsilon_x q_z$$

$$\delta q'_z = -\epsilon_y q_x + \epsilon_x q_y.$$

Ha most képezzük a (26) összefüggésbeli szorzatot, és kiemeljük az  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  és  $\epsilon_z$  együtthatókat, akkor ennek értékére kapjuk:

$$\epsilon_x(-p_y q_z + p_z q_y) + \epsilon_y(p_x q_z - p_z q_x) + \epsilon_z(-p_x q_y + p_y q_x).$$

Ismeretes, hogy itt rendre az impulzusmomentum vektor  $x, y, z$  komponensei álltak elő.

<sup>13</sup>Megjegyezzük, hogy itt az eredeti Lotka-Volterra-modellt vesszük, az  $a, b, c, d > 0$  kikötésekkel, ami biztosítja az ökológiai értelmezést.

egyenleteket kapjuk:

$$\frac{\dot{x}}{xy} = \frac{a}{y} - d, \quad (28a)$$

$$\frac{\dot{y}}{xy} = -\frac{b}{x} + c. \quad (28b)$$

A (27a) és (27b) mozgásegyenletek Lagrange-függvénye a következő:

$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{1}{2} \frac{\ln y}{x} \dot{x} - \frac{1}{2} \frac{\ln x}{y} \dot{y} - (a \ln y + b \ln x - cx - dy). \quad (29)$$

Ez könnyen ellenőrizhető, ha vesszük az  $L$  egyes változóit, azaz  $x$  és  $y$  szerinti Euler-Lagrange-egyenleteit, amelyek pontosan megegyeznek a Lotka-Volterra-rendszer (27a) és (27b) egyenleteivel.

Végül a Hamilton-függvényt fejezzük ki, amely a következő:

$$H = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - L = a \ln y + b \ln x - cx - dy. \quad (30)$$

Mivel a Lagrange-függvény explicite nem függ az időváltozótól, ezért a Hamilton-függvény a megmaradó mennyiség (első integrál), ami a mechanikában az  $E$  energiának felel meg. Kis átalakítás után egy kompakt formulát kapunk a megmaradó mennyiségre:

$$I (= e^E) = \frac{x^b y^a}{e^{cx+dy}}. \quad (31)$$

## 5. A mozgásegyenletek Lie-szimmetriái

Ebben a pontban megvizsgáljuk a (27a) és (27b) mozgásegyenletekkel leírt Lotka-Volterra-rendszer Lie-szimmetriáit. Tekintsük most a következő infinitezimális transzformációkat:

$$x' = x + \eta_1(x, y), \quad (32)$$

$$y' = y + \eta_2(x, y), \quad (33)$$

$$t' = t, \quad (34)$$

ahol nem tételezzük fel az  $\eta_1(x, y)$  és  $\eta_2(x, y)$  függvények időfüggését, azaz az idő szerinti parciális deriváltjaik zérussal egyenlők:  $\partial \eta_1 / \partial t = \partial \eta_2 / \partial t = 0$ . Behelyettesítve a (32), (33) és (34) egyenleteket a (27a) és (27b) egyenletekbe, az egyszerűsítés után az alábbi PDE rendszert kapjuk:

$$(ax - dyx) \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + (cxy - by) \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + (dy - a) \eta_1 + dx \eta_2 = 0, \quad (35)$$

$$(ax - dyx) \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + (cxy - by) \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - cy \eta_1 + (b - cx) \eta_2 = 0. \quad (36)$$

E két csatolt parciális differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását mutatják az alábbi egyenletek:

$$\eta_1 = ax - dxy, \quad (37)$$

$$\eta_2 = cxy - by, \quad (38)$$

amelyek felhasználásával azonnal megfogalmazhatjuk a releváns generátort (a szimmetria vektort)<sup>14</sup>:

$$X_1 = (ax - dxy) \frac{\partial}{\partial x} + (cxy - by) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (39)$$

A (35) és (36) egyenletek egy másik megoldása következőképpen írható:

$$\eta_1 = \frac{x^b y^a}{e^{cx+dy}} x (a - dy), \quad (40)$$

$$\eta_2 = \frac{x^b y^a}{e^{cx+dy}} y (cx - b). \quad (41)$$

Most az infinitezimális generátor a következő:

$$X_2 = \frac{x^b y^a}{e^{cx+dy}} (ax - dxy) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x^b y^a}{e^{cx+dy}} (cxy - by) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (42)$$

Összehasonlítva a (39) és (42) egyenletekben szereplő generátorokat, könnyen belátható, hogy

$$X_2 = \frac{x^b y^a}{e^{cx+dy}} X_1, \quad (43)$$

azaz a generátorok csak egy tényezőben különböznek. Mivel a generátorok struktúrája ugyanaz, a kérdéses

$$I = \frac{x^b y^a}{e^{cx+dy}} \quad (44)$$

tényezőnek a mozgás állandóságát kell mutatnia. Ez az eredmény összhangban van a (31) egyenletben szereplő, a Lagrange-függvény alapján kapott megmaradó mennyiséggel, ami a Lotka-Volterra rendszer dinamikai szimmetriájára vonatkozik. Hangsúlyozzuk, hogy ezeket az eredményeket anélkül kaptuk, hogy levezetéseinkben bármiféle kikötést is tettünk volna az  $a, b, c, d$  paraméterekre, szemben Fernández-Núñezzel (1998).

## 6. Goodwin növekedési ciklusa

Goodwin (1967) 'növekedési ciklusa' a foglalkoztatás és a kibocsátás (teljes termelés) elosztási arányainak egyszerű dinamikus modellje. A foglalkoztatási ráta

---

<sup>14</sup>Részletekért lásd Hydon (2000).



és a munkások teljes jövedelemből történő részesedése mozgáspályáit az alábbi nem lineáris dinamikai rendszer alapján vizsgálta:

$$\dot{v} = [(1/\sigma) - (\alpha + \beta) - (1/\sigma)u]v, \quad (45)$$

$$\dot{u} = [-(\alpha + \gamma) + \rho v]u, \quad (46)$$

ahol  $v$  a foglalkoztatási ráta,  $u$  a munkások teljes jövedelemből történő részesedése,  $\dot{v}$  és  $\dot{u}$  az idő szerinti deriváltak,  $\sigma$  a rögzített tőke-kibocsátás arány,  $\alpha$  a munkatermelékenység növekedési üteme, ami állandó meg nem testesült technikai haladást feltételezve konstans.  $\beta$  a munkaerő-kínálat állandó növekedési üteme, valamint  $\dot{w}/w = -\gamma + \rho v$ , ahol  $w$  a béraráta,  $\gamma$  és  $\rho$  konstansok nagy pozitív értékekkel. Megjegyezzük, hogy a (45) és (46) egyenletek egy elsőrendű nem lineáris autonóm homogén 2D differenciálegyenlet-rendszert alkotnak.

Ha nincs  $u$  a (45) egyenletben, akkor a foglalkoztatás konstans ütemben nő, azaz  $\dot{v}/v = (1/\sigma) - (\alpha + \beta)$ , ahol  $(1/\sigma) > (\alpha + \beta)$ , ami azt jelenti, hogy a tőke hatékonysága nagyobb, mint a munkatermelékenység növekedési ütemének és a munkaerő-kínálat növekedési ütemének összege. Másképpen, a foglalkoztatási ráta nő, ha a tőke hatékonysága nagyobb, mint a növekedés intenzív és extenzív tényezőinek összege. Hasonlóan, ha nincs  $v$  a (46) egyenletben, akkor a munkások teljes jövedelemből történő részesedése konstans ütemmel csökken, azaz  $\dot{u}/u = -(\alpha + \gamma)$ . Vagyis a munkások teljes jövedelemből történő részesedésének üteme pontosan annyival csökken, mint a munkatermelékenység növekedési ütemének és a béraráta autonóm növekedési ütemének az összege. Mindkét esetben a mozgási pálya exponenciális függvény, az előbbi esetben növekvő, az utóbbiban csökkenő. Ha viszont figyelembe vesszük a másik változót is, akkor (45)-ben a tőke hatékonysága az  $u$ -n keresztül csökkenti a foglalkoztatási ráta ütemét, a (46)-ban pedig az egységyi foglalkoztatási rátára eső béraráta növekedési üteme a  $v$ -n keresztül csökkenti a munkások teljes jövedelemből történő részesedésének csökkenési ütemét.

Ezt követően Goodwin eliminálja az időváltozást a (45) és (46) egyenletekből. Ebben ugyanazt az egyszerű technikát alkalmazta, mint amit Andronov et al. (1966, 143–145. o.) alkalmaztak a Lotka-Volterra dinamikai rendszerre. Az így kapott időinvariancia, csakúgy mint a klasszikus mechanikában, az első integrált adja:

$$[(1/\sigma) - (\alpha + \beta)] \ln u + (\gamma + \alpha) \ln v - (1/\sigma)u - \rho v = \text{const.} \quad (47)$$

Míg Goodwin semmi többet nem mondott erről az egyenletről, most megmutatjuk, hogy az a (45) és (46) dinamikai rendszer Hamilton-függvénye, vagy másként, a megmaradó mennyiség.

## 7. A Goodwin-modell Lagrange- és Hamilton-függvénye

Könnyen belátható, hogy a (45) és (46) egyenletekkel leírt Goodwin-modell az önszabályozó foglalkoztatás-bér rendszer időbeni evolúciója a Lotka-Volterra-

rendszer egy-egy leképezése, ekvivalenciája. A  $v$  foglalkoztatási ráta az  $x$  áldozatszámának, a munkások teljes jövedelemből történő  $u$  részesedése pedig az  $y$  ragadozószámának felel meg. Az ekvivalenciához a két modell megfelelő együtthatóinak is meg kell egyeznie, azaz a (45) és (46) valamint a (27a) és (27b) egyenletek megfelelő összehasonlításából kapjuk:

$$\begin{aligned}(1/\sigma) - (\alpha + \beta) &= a \\ 1/\sigma &= d \\ \alpha + \gamma &= b \\ \rho &= c.\end{aligned}$$

Ha most  $L'$  jelöli a Goodwin-modellhez tartozó Lagrange-függvényt, akkor ezt a következő alakban írhatjuk:

$$\begin{aligned}L'(v, \dot{v}, u, \dot{u}) &= \frac{1}{2} \frac{\ln u}{v} \dot{v} + \frac{1}{2} \frac{\ln v}{u} \dot{u} - \\ &- (((1/\sigma) - (\alpha + \beta)) \ln u + (\alpha + \gamma) \ln v - (1/\sigma) u - \rho v).\end{aligned}\quad (48)$$

Ha vesszük az  $L'$  Lagrange-függvény  $v$  és  $u$  szerinti Euler-Lagrange-egyenleteit, akkor a Goodwin-modell (45) és (46) egyenleteihez jutunk. Ezzel megmutattuk, hogy a Goodwin-modell is rendelkezik Lagrange-struktúrával.

A fentieket alkalmazva egyszerű számolással meggyőződhetünk arról is, hogy a Goodwin-modell Hamilton-függvénye az alábbi:

$$H' = \dot{v} \frac{\partial L'}{\partial \dot{v}} + \dot{u} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}} - L' = ((1/\sigma) - (\alpha + \beta)) \ln u + (\alpha + \gamma) \ln v - (1/\sigma) u - \rho v \quad (49)$$

ami a megmaradó mennyiség, azaz az első integrál, ami megegyezik a (47) egyenlettel. Ha itt is vesszük az  $E'$  energiával történő mechanikai megfeleltetést, akkor az első integrált most a következő alakban is felírhatjuk:

$$I' \left( = e^{E'} \right) = \frac{v^{\alpha+\gamma} u^{(1/\sigma) - (\alpha+\beta)}}{e^{\rho v + (1/\sigma) u}}. \quad (50)$$

## 8. A Goodwin-modell Lie-szimmetriái

Vegyük a modell állapotváltozóinak alábbi infinitezimális transzformációit:

$$v' = v + \zeta_1(v, u) \quad (51)$$

$$u' = u + \zeta_2(v, u) \quad (52)$$

$$t' = t, \quad (53)$$

ahol  $\zeta_1(v, u)$  és  $\zeta_2(v, u)$  függvények explicite nem függenek az időtől, azaz  $\partial \zeta_1 / \partial t = \partial \zeta_2 / \partial t = 0$ . Most helyettesítsük be az (51), (52) és (53) egyenleteket a

(45) és (46) egyenletekbe; átalakítások után a következő parciális differenciálegyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} (((1/\sigma) - (\alpha + \beta))v - (1/\sigma)uv) \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} + (\rho v u - (\alpha + \gamma)u) \frac{\partial \zeta_1}{\partial u} + \\ + ((1/\sigma)u - (1/\sigma) + (\alpha + \beta))\zeta_1 + (1/\sigma)v\zeta_2 = 0, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} (((1/\sigma) - (\alpha + \beta))v - (1/\sigma)uv) \frac{\partial \zeta_2}{\partial v} + (\rho v u - (\alpha + \gamma)u) \frac{\partial \zeta_2}{\partial u} - \\ - \rho u \zeta_1 + (\alpha + \gamma - \rho v)\zeta_2 = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

Természetesen ismét két csatolt parciális differenciálegyenletet kaptunk, amelyek egy lehetséges partikuláris megoldása

$$\zeta_1 = ((1/\sigma) - (\alpha + \beta))v - (1/\sigma)uv, \quad (56)$$

$$\zeta_2 = \rho v u - (\alpha + \gamma)u. \quad (57)$$

Ezeket felhasználva, a releváns generátort, vagyis a Lie-szimmetriavektort is felírhatjuk:

$$X'_1 = (((1/\sigma) - (\alpha + \beta))v - (1/\sigma)uv) \frac{\partial}{\partial v} + (\rho v u - (\alpha + \gamma)u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (58)$$

Az (54) és (55) egyenletek egy másik megoldását adják az alábbi egyenletek:

$$\zeta_1 = \frac{v^{\alpha+\gamma} u^{1/\sigma-(\alpha+\beta)}}{e^{\rho v + 1/\sigma}} ((1/\sigma) - (\alpha + \beta) - (1/\sigma)u)v, \quad (59)$$

$$\zeta_2 = \frac{v^{\alpha+\gamma} u^{(1/\sigma)-(\alpha+\beta)}}{e^{\rho v + (1/\sigma)u}} (\rho v - (\alpha + \gamma))u. \quad (60)$$

Az infinitezimális generátor most a következőképpen adható meg:

$$\begin{aligned} X'_2 = \frac{v^{\alpha+\gamma} u^{(1/\sigma)-(\alpha+\beta)}}{e^{\rho v + (1/\sigma)u}} ((1/\sigma)v - (\alpha + \beta) - (1/\sigma)uv) \frac{\partial}{\partial v} \\ + \frac{v^{\alpha+\gamma} u^{(1/\sigma)-(\alpha+\beta)}}{e^{\rho v + (1/\sigma)u}} (\rho v u - (\alpha + \gamma)u) \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (61)$$

Ha egybevetjük az (58) és (61) egyenletekkel meghatározott generátorokat, akkor könnyen észrevehetjük, hogy

$$X'_2 = \frac{v^{\alpha+\gamma} u^{(1/\sigma)-(\alpha+\beta)}}{e^{\rho v + (1/\sigma)u}} X'_1, \quad (62)$$

azaz a generátorok csak egy tényezőben különböznek. Minthogy a generátorok struktúrája most is megegyezik, a kérdéses

$$I' = \frac{v^{\alpha+\gamma} u^{(1/\sigma)-(\alpha+\beta)}}{e^{\rho v + (1/\sigma)u}} \quad (63)$$

tényezőnek az állandó mozgásmennyiségnek kell lennie. Pontosan megegyezik a Lagrange-függvényből kapott megmaradó mennyiséggel, az (50) egyenletbeli összefüggéssel, ami a Goodwin-modell dinamikus szimmetriájára vonatkozik.

## 9. Következtetések

A Goodwin-modell a tőkefelhalmozás és a jövedelemelosztás közötti kölcsönös függőséget vizsgálja. Megoldásgörbéi választ adnak arra a kérdésre is, hogy a felhalmozás (növekedés) hogyan változik ciklikusan,

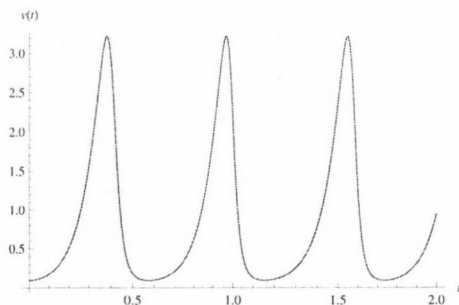
$$T = 2\pi / [(\alpha + \gamma) ((1/\sigma) - (\alpha + \beta))]^{1/2}$$

periódussal, az egyensúlyi pont<sup>15</sup> körül, amely a következő koordinátákat veszi fel:

$$\begin{aligned} u^* &= 1 - (\alpha + \beta) \sigma, \\ v^* &= (\alpha + \gamma) / \rho. \end{aligned}$$

A modellben szereplő paraméterek becsülhetők a megfelelő idősorokból ökonometriai eljárásokkal. E számítások egyúttal a modell valós adatokkal történő tesztelését is jelentik, amiről érdekes következtetések olvashatók Harvie (2000) tanulmányában<sup>16</sup>.

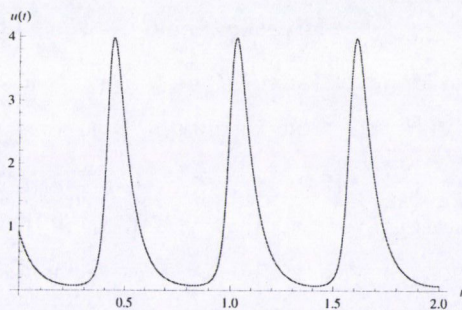
Az alábbi grafikonok a paraméterek következő megválasztásával készültek:  $\alpha = 0.056$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\sigma = 0.08$ ,  $\gamma = 15$  és  $\rho = 17$ . A kezdeti értékek:  $v(0) = 0.095$  és  $u(0) = 0.9$ .



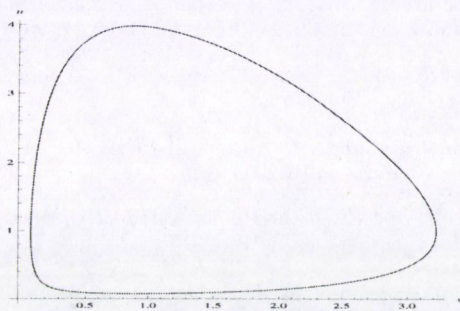
1. ábra. A  $v(t)$  időbeli periodikussága.

<sup>15</sup>Ez az ún. nem triviális egyensúlyi pont. A triviális egyensúlyi pont az origo, amely instabil nyeregpont, és ami most kívül esik vizsgálatainkon.

<sup>16</sup>Érdemes megjegyezni, hogy Bródy András és Farkas Miklós (1987) a magyar gazdaságra végeztek teszteléseket a Goodwin-moddellel.



2. ábra. Az  $u(t)$  időbeli periodikussága.



3. ábra. Az  $u-v$  fázisportré.

A Goodwin-modell ciklikus pályái - amint bebizonyítottuk -, olyan extrémális pályák a fázistérben, amelyek mentén a modell Lagrange-függvényének integrálja stacionárius, vagyis optimális a legkisebb hatás elve alapján. Ez az eredményünk jelentősen pontosítja az elsőrendű nem lineáris közönséges differenciálegyenletekkel (ODE) leírt rendszerek mozgáspályáinak eddigi jellemzését, amit általánosítva, kimondhatjuk: minden olyan dinamikai rendszer mozgáspályája optimális, aminek van Lagrange-függvénye.

Vizsgálatainkkal tehát kimutattuk, hogy ezt a ciklikus mozgást a modell Lie-szimmetriái, pontosabban a dinamikai szimmetriája generálja. A modell Lagrange-függvénye alapján kapott állandó mozgásmennyiség, az ún. első integrál eredményezi a belső szimmetriáját. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a Nöther-tétel a Goodwin-modell mechanikájában is szerepet kap.



## Hivatkozások

- [1] ALMEIDA, M. A. AND MOREIRA, I. C.: *J. Phys. A: Math. Gen.* **24** 4567 (1992)
- [2] ANDRONOV, A. A., VITT, A. A. AND KHAIKIN, S. E.: *Theory of Oscillators*, Pergamon Press, Oxford (1966)
- [3] BAUMANN, G. AND FREYBERGER, M.: *Generalized symmetries and conserved quantities of the Lotka-Volterra model*, Physics Letters A, Vol. **156**, No. **9**, (1991) 488–490. o.
- [4] BRÓDY ANDRÁS ÉS FARKAS MIKLÓS: *Forms of Economic Motion*, Acta Oeconomica **38**, (1987) 361–370. o.
- [5] BUDÓ ÁGOSTON: *Mechanika*, Tankönyvkiadó, Budapest (1965)
- [6] FERNANDEZ-NUÑEZ, J.: *Lagrangian Structure of the Two-Dimensional Lotka-Volterra System*, International Journal of Theoretical Physics, Vol. **37**, No. **9**, (1998) 2457–2462. o.
- [7] GOODWIN, H. R.: *A growth cycle*, in Feinstein, C. H. (ed.): *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, Cambridge University Press, Cambridge (1967)
- [8] HARVIE, D.: *Testing Goodwin: growth cycles in ten OECD countries*, Cambridge Journal of Economics, Vol. **24**, (2000) 349–376. o.
- [9] HYDON, P. E.: *Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (2000)
- [10] LOTKA, A. J.: *Elements of Mathematical (Physical) Biology*, New York, Dover Publication (1925)
- [11] LORENZ, E.: *Deterministic non-period flows*, Journal of Atmospheric Sciences **20**, (1963) 130–141. o.
- [12] MORANDI, G., FERRARIO, C., LO VECCHIO, G., AND RUBANO, C.: *Phys. Rep.* **188**, (1990) 147–284. o.
- [13] MÓCZÁR JÓZSEF: *Fejezetek a modern közgazdaság-tudományból, Sztochasztikus és dinamikus nemegyensúlyi elméletek, természettudományos közelítések*, Akadémiai Kiadó, Budapest (2008)
- [14] MÓCZÁR JÓZSEF: *A fizikai matematika legújabb eredményei mint a közgazdaság-tudomány lehetséges vizsgálati eszközei*, Alkalmazott Matematikai Lapok, Vol. **27**, No. **1**, (2010) 41–77. o.
- [15] NAGY KÁROLY: *Kvantummechanika*, Tankönyvkiadó, Budapest. (1981)
- [16] NÖTHER, E.: *Invariante Varitionsprobleme*, Nachr. d. Königl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse, (1918) 235–257. o.
- [17] NUTKU, Y.: *Hamiltonian Structure of the Lotka-Volterra Equations*, Physics Letters A, Vol. **145**, No. **1**, (1990) 27–28. o.
- [18] SEN, T. AND M. TABOR: *Lie Symmetries of the Lorenz modell*, Physics D **44**, (1990) 313–339. o.
- [19] SENTHIL VELAN, M. AND M. LAKSMANAN: *Lie symmetries and infinite dimensional Lie algebras of certain nonlinear dissipative systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **28**, (1995) 1929–1942. o.

- [20] VOLTERRA, V.: *Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie*, Gaithier-Villars, Paris (1931)
- [21] WIGNER, E. P.: *Prog. Theor. Phys.* **11**, (1954) 437–440. o.

(Beérkezett: 2011. július 19.)

MÓCZÁR JÓZSEF

Budapesti Corvinus Egyetem

Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemzés Tanszék

1093 Budapest, Fővám tér 8.

e-mail: jozsef.moczar@uni-corvinus.hu

MÁRKUS FERENC

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Fizika Tanszék

1521 Budapest, Budafoki út 8.

homepage: markusferi.tvn.hu

## AN ECONOMIC APPLICATION OF THE LIE SYMMETRIES

JÓZSEF MÓCZÁR AND FERENC MÁRKUS

The dynamic behavior of a physical system can be frequently described very concisely by the least action principle. In the centre of its mathematical presentation is a specific function of coordinates and velocities, i.e., the Lagrangian. If the integral of the Lagrangian is stationary, then the system is moving along an extremal path through the phase space, and vice versa. It can be seen, that each Lie symmetry of a Lagrangian in general corresponds to a conserved quantity, and the conservation principle is explained by a variational symmetry related to a dynamic or geometrical symmetry. Briefly, that is the meaning of Noether's theorem.

This paper scrutinizes the substantial characteristics of Noether's theorem, interprets the Lie symmetries by PDE system and calculates the generators (symmetry vectors) on R. H. Goodwin's cyclical economic growth model. At first it will be shown that the Goodwin model also has a Lagrangian structure, therefore Noether's theorem can also be applied here. Then it is proved that the cyclical moving in his model derives from its Lie symmetries, i.e., its dynamic symmetry. All these proofs are based on the investigations of the less complicated Lotka – Volterra model and those are extended to Goodwin model, since both models are one-to-one maps of each other.

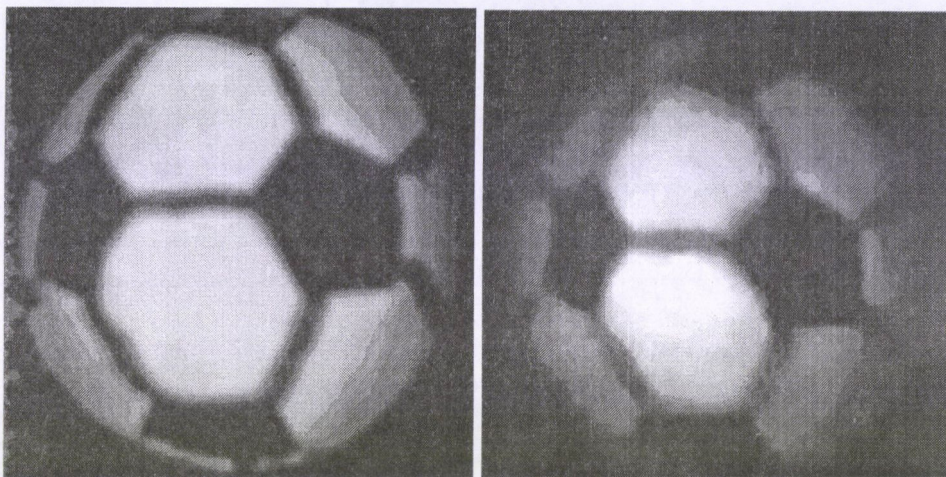
The main achievement of this paper is the following: Noether's theorem is also playing a crucial role in the mechanics of Goodwin model. It also means, that its cyclical moving is optimal. Generalizing this result, we can assert, that all dynamic systems' solutions described by first order nonlinear ODE system are optimal by the least action principle, if they have a Lagrangian.





## TÖMÖRÍTETT ÉRZÉKELÉSNEEL MINDEN EGYES KÉPPONT SZÁMÍT<sup>1</sup>

Fordította: Réti Zoltán



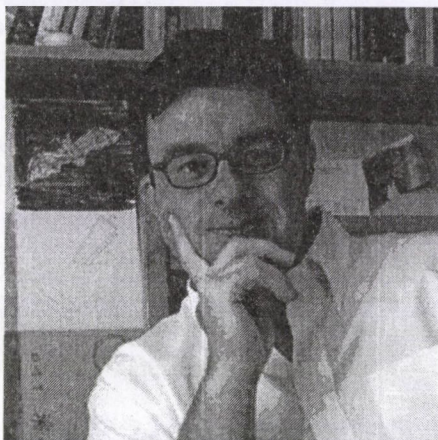
**Egy is elegendő.** Richard Baraniuk és Kevin Kelly a Rice University-ről építette azt az egyetlen pixeles fényképezőgépet, amivel ez a fénykép készült. (a) Egy focilabda képe, amit 64x64-es felbontásban hagyományos digitális fényképezőgép vett le. (b) Ugyanaz a focilabda az egyetlen pixeles fényképezőgéppel. A képet 1600 különböző, véletlenszerűen kiválasztott mérésből matematikailag származtatták, felhasználva a tömörített érzékelésnek nevezett módszert. (R. G. Baraniuk, Compressive Sensing [Lecture Notes], Signal Processing Magazine, July 2007. ©2007 IEEE. szívésségéből)

Az a közös dolog a szemétnben és a számítógépes fájlokban, hogy mindkettő összenyomottan szép. A digitális fényképezőgépek vásárlásakor azonban észrevehetjük, hogy gyártóik ezt nem értették meg.

Néhány éve a műszaki boltok tele voltak 1, vagy 2 megapixeles gépekkel. Aztán jöttek a 3 megapixeles áramköri lapkák, majd a 10, sőt a 60 megapixelesek.

<sup>1</sup>Eredeti cím: Compressed Sensing Makes Every Pixel Count, What's Happening in the Mathematical Science, 7. kötet. Az Alkalmazott Matematikai Lapok szerkesztősége köszönetet mond az Amerikai Matematikai Társaságnak (American Mathematical Society), amiért engedélyezte a dolgozat magyar fordításának egyszeri publikálását. Az AMS minden további jogot fenntart magának.





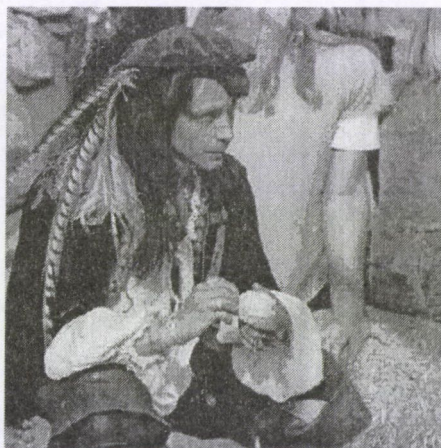
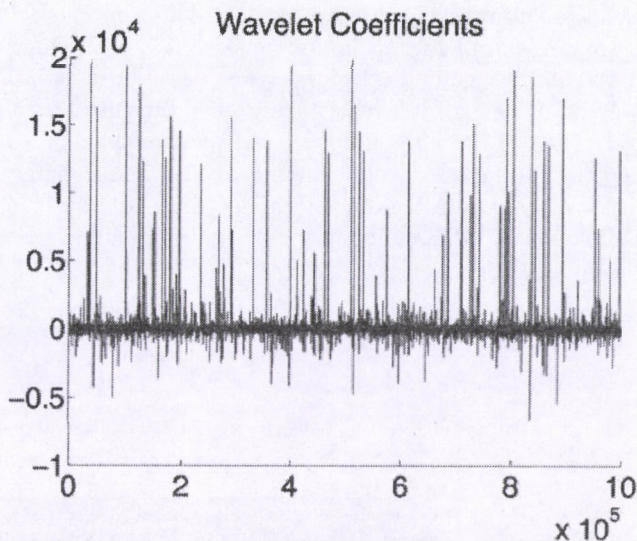
Emmanuel Candes. (saját szívésségéből)

Sajnos, ezek a nagyon sok pixeles fényképezőgépek óriási méretű számítógépes adatfájlokat hoznak létre. Ezért ha az ember e-mail-en akar elküldeni egy fényképet, vagy fel akarja rakni a világhálóra, az az első dolog, hogy kezelhetőbb méretre tömöríti. Általában szabad szemmel lehetetlen észrevenni a különbséget ezen összetömörített és az eredeti fénykép között (lásd az 1. ábrát). Így kettős dinamika fejlődött ki: a fényképezőgépek mérnökei egyre több adatot zsúfolnak a lapkákra, miközben a számítógépes programok mérnökei egyre okosabb módokat ötlenek ki, hogy megszabaduljanak az adatoktól.

2004-ben matematikusok megtalálták a módját, hogy hogyan állítsák meg ezt a „fegyverkezési versenyt”. Miért vegyünk méretet 10 milliószor, amikor esetleg 10 ezer is elég ahhoz, hogy képünket kielégítően jellemezze? Nem lenne-e jobb, ha már kezdetben is csak a leglényegesebb 10 ezer adatot vennénk le? Hálával tartozunk Emmanuel Candesnek (Caltech Egyetem), Terence Taonak (University of California Los Angeles-i részlege), Justin Rombergnek (Georgia Tech Egyetem) és David Donohonak (Stanford University) azért a hathatós matematikai technikáért, amivel az adatmennyiséget ezredére csökkenthetjük, *mielőtt* egyáltalán befogadnánk. Eljárásukat *tömörített érzékelésnek* hívják. Ez a kifejezés mérnököknél mostanában nagyon felkapott lett, habár matematikai gyökerei évtizedesek.

Az elgondolás bizonyítékaként Richard Baraniuk és Kevin Kelly (Rice University) még egy *egyetlen pixeles* fényképezőgépet is kifejlesztettek. Azért persze ne gondoljuk, hogy ez a gép felbukkan a Wal-Mart polcain a 10 megapixelesek mellett, mivel utóbbiaknak beépített gazdaságossági előnyük van. „Azért tudjuk olyan olcsón megépíteni őket, mert szerencsés véletlen egybeesés van a szemünk által és a szilikon által érzékelt fény hullámhosszai között.” - mondja Baraniuk. „Ez tette lehetővé, hogy a fényképezőgép-készítők a Moore-szabály szekerén utazzanak (azaz kihasználják Moore-szabályát)”, más szóval azt, hogy nagyjából kétszerként megduplázzák a pixeleket, azaz képpontok számát.





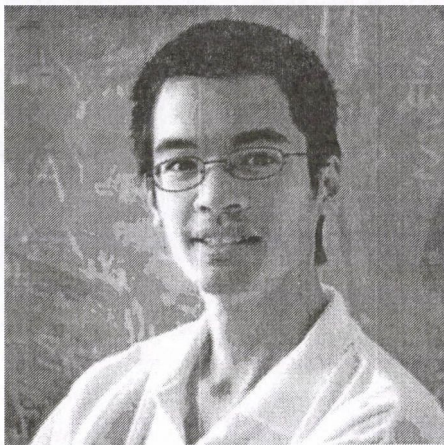
**1. ábra.** Balra: az eredeti teszt kép. Fent: Az egyik standard tömörítő eljárás, hogy a képet waveletek összegeként fejezzük ki. Fent a waveletek együtthatóit ábrázoltuk, a nagy együtthatók a képhez jelentősen hozzájáruló waveleteket jelzik (például amelyek egy élet vagy textúrát azonosítanak). Jobbra: Amikor a kis együtthatókkal rendelkező waveleteket kihagyjuk, és csak a többi waveletből állítjuk a képet helyre, az eredetitől majdnem megkülönböztethetelen lesz. (Emmanuel Candes szívességéből)



Emiatt a tömörített érzékelés valódi piaca a láthatatlan hullámhosszoknál van. Ezen hullámhosszoknál nem olcsó dolog érzékelőket építeni, viszont az ilyen érzékelőknek sok alkalmazási lehetősége van. Például a mobiltelefonok a rádiófrekvenciák széles spektrumából fognak kódolt jeleket. A terahertzes sugárzás<sup>2</sup> vevőit pedig csempészáru vagy ruha alatt elrejtett fegyverek kiszűrésére lehet használni.

Még a közönséges infravörös fényről is költséges fényképet készíteni. „Ha kilépünk abból a hatókörből, ahol a szilikon érzékeny, akkor a 100 dolláros fényképezőgép 100 ezer dollárossá válik” - mondja Baraniuk. Néhány alkalmazásnál, például úrhajók esetében, lehet, hogy nincs elég hely túl sok érzékelő számára. Az ilyen alkalmazásoknál komolyan el kell gondolkodnunk azon, hogy hogyan tegyünk minden egyes képpontot (pixel) értékké.

### 1. A régi, hagyományos bölcsesség



**Terence Tao.** (Reed Hutchinson/UCLA szívességéből)

A tömörített érzékelés története Claude Shannonnal kezdődik, aki az információelmélet úttörője volt. Shannon 1949-ben bizonyította be, hogy egy időben változó, de  $N$  hertznél nem magasabb frekvenciájú jelet tökéletesen helyre lehet állítani, ha a jelből  $\frac{1}{2}N$  másodperces szabályos időközönként mintát veszünk. De ez pont annak a tételnek a fordítottja, ami jelfeldolgozók nemzedékeinek vált az evangéliumává: az  $N$  hertznél magasabb frekvenciájú jelet *lehetetlen* egyértelműen helyreállítani; egy jel bármikor „álménen” jelenhet meg (aliasing), vagyis mintája azonos lehet egy másik jelből vett mintával.

<sup>2</sup>Ez az elektromágneses spektrum azon része, amit nézőponttól függően vagy ultra ultramagas rádiófrekvenciának, vagy infra infravörös fénynek írhatunk le.

A digitális képek világában egy kép a „jel”, és a képből vett „minta” jellegzetesen egy képpont (pixel), ami más szóval egy kiválasztott pont mérésnyi fényerőssége (talán színadatokkal is megtűzdelve). Shannon tétele, amit Shannon-Nyquist mintavételi tételnek is neveznek, azt mondja ki, hogy egy kép felbontása egyenesen arányos a mérések számával. Ha meg akarjuk duplázni a felbontást, akkor jól tesszük, ha a pixelek számát is megduplázzuk. A digitális fényképezőgépek eladói pontosan ilyennek látják a világot.

Candes, Tao, Romberg és Donoho ezt a világot állította a feje tetejére. A tömörített érzékelés világában az elérhető felbontást főleg a kép *információtartalma* vezérli. Alacsony információtartalmú képet tökéletesen helyre lehet állítani kis számú mérésből. Ha már megfelelő számú mérést végeztünk, nem segít, ha még többet mérünk. Ha az ilyen képek ritkák vagy szokatlanok lennének, a dolog nem lenne nagyon izgalmas. De valójában *jóformán mindegyik*, a valós életből vett képnek alacsony az információtartalma (mint ahogy az 1. ábrán látható).

Ez a kijelentés az ösztöneinkkel ellentétesnek tűnik, hiszen az „információ” matematikai jelentése a köznyelvi jelentésnek a majdnem teljes ellentéte. Egy TV-képernyőn levő véletlenszerű statikus zaj látványa példa magas információtartalmú képre. A legtöbb laikus valószínűleg ezt a jelet információ nélkülinek tekintené! De egy matematikus számára ez pontosan azért magas információtartalmú, mert nincs benne szabályszerűség. A kép leírásához, vagy két ilyen kép megkülönböztetéséhez a szó szoros értelmében minden egyes pixelt meg kell neveznünk. Ezzel szemben a valós életből vett képeknek alacsony az információtartalma, mivel kis számú leíró elemmel továbbíthatjuk a kép tartalmát. Néhány vonás elégséges, hogy egy arc képzetét keltsük, míg egy képzett művész, viszonylag csekély számú ecsetvonással, bármilyen arcról felismerhető hasonmást tud készíteni.<sup>3</sup>

A tömörített érzékelés ötlete az, hogy a legtöbb, valós életből vett képnek pont az alacsony információtartalmát használjuk ki, és ezzel kerüljük meg a Shannon-Nyquist mintavételi tételt. Ha egyáltalán nincs információnk a helyreállítani kívánt jelről vagy képről, akkor Shannon tétele helyesen határolja be az elérhető felbontást. De ha tudjuk, hogy a kép ritkás vagy tömöríthető, akkor Shannon korlátai nem érvényesek.

Jóval azt megelőzően, hogy a „tömörített érzékelés” divatos kifejezéssé vált volna, voltak már utalások a jelenségre. Az 1970-es évek végén, földrengésekkel foglalkozó mérnökök kezdték felfedezni, hogy „az úgynevezett sarkalatos korlátok nem is sarkalatosak” - mondja Donoho. Földrengéskutatók a rétegek közötti folytonossági hiányokról visszapattanó földrengéshullámokból gyűjtenek információt a földalatti sziklaképződményekről. (A szikla állagában vagy összetételében meglevő bármilyen hirtelen változás, mint például egy olajtartalmú sziklaréteg előfordulása, a felszínre fogja tükrözni a rezgéshullámot.) Elméletileg a visszatükrözött hullámok nem tartalmaznak elegendő információt ahhoz, hogy a sziklarétegek képét

<sup>3</sup>A „képzett művész” mai változatát képtömörítő algoritmusnak hívjuk. Ilyen például a JPEG-2000 szabvány, amelyik az eredeti kép másolatát kevés számú, *wavelet*nek hívott alkotóelemből állítja elő. (Lásd a Parlez-vous Wavelets című cikket a What's happening in Mathematical Sciences 2. kötetében)





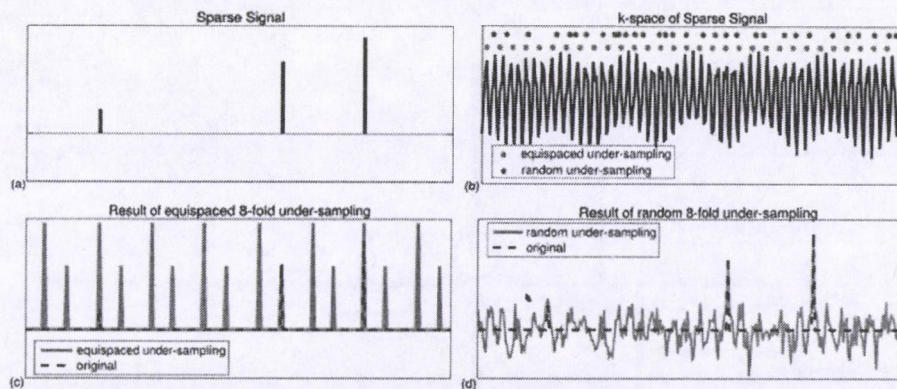
**Justin Romberg.** (saját szívességéből)

egyértelműen felrajzoljuk. Ennek ellenére, a földrengéskutatók képesek voltak a tőlük jogosan elvárhatónál jobb képeket nyerni. Az olajkutatás kevésbé vaktában történik azóta, hogy képesek vagyunk a föld alá „látni”. Donoho szerint a földrengéskutatók a „ritkás tüskenyaláb (sparse spike train) feltevés”-sel magyarázták szerencsésüket. A feltevés az, hogy a földalatti sziklák szerkezete elég egyszerű. A legtöbb mélységben a szikla egynemű, ezért egy bejövő földrengéshullám semmit sem lát. Szabálytalan időközönként a földrengéshullámok a szikla egyik folytonossági hiányával találják magukat szembe, és ekkor éles, tüskealakú jelet küldenek vissza küldőjüknek. Így a jel tüskék olyan ritkás sorozata, amelyben a tüskék között hosszú szünetek vannak.

Ilyen körülmények között meg lehet szabadulni Shannon tételének a béklyóitól. Könnyebb a duális helyzetet átgondolni, ami csak néhány,  $N$  hertzes frekvenciát meg nem haladó, szinuszos hullám egymásra rakásából adódó ritkás *hullámmnyaláb*ot jelent. Ha  $K$  darab frekvenciatüske van egy olyan jelben, amiben a maximális frekvencia  $N$ , akkor Shannon tétele azt mondja, hogy egyenlő közökben  $N$  mintát gyűjtsünk. De a ritkás tüskenyaláb feltevés szerint  $3K$ , sőt néha  $2K$  minta is elégséges. A trükk abban áll, hogy nem egyenlő időközönként, hanem találomra vesszük a mintákat (lásd a 2. és 3. ábrát). Ha  $K \ll N$  (és éppen ez a „ritkás” jel jelentése), akkor sokkal hatékonyabb a véletlenszerű mintavétel.

Más területeken is, mint pl. a mágneses rezonancia vizsgálat (MRI), azt találták a kutatók, hogy az adatminta „alul-mintavételezésével” is még jó eredményeket tudnak kapni. Tudományos találkozókra mindig kételkedéssel találták magukat szemben, mondja Donoho, mivel olyasmit próbáltak csinálni, ami állítólag lehetetlen volt. Visszanézve, egyfajta matematikai „tanúsítvány” hiányzott, a jóváhagyás pecsétje, ami azt garantálja, hogy a véletlenszerű mintavétel mikor működik.





**2. ábra.** Ritka (sparse) hullámnyaláb rekonstrukciója. (a) Egy 3-ritka (sparse) jel frekvencia spektruma. (b) Maga a jel, két mintavételi stratégiával: egyenletes mintavétel (vörös pettyek), véletlenszerű mintavétel (kék pettyek). (c) Amikor a spektrumot az egyenletes mintavételből állítjuk vissza, súlyos "aliasing" az eredmény, mert a minták száma 8-szor kevesebb, mint a Shannon-Nyquist korlát. Lehetetlen megmondani, hogy melyik frekvencia valódi és melyik az imposztor. (d) Véletlenszerű mintavétel esetén könnyű kiszűrni a háttérből a két legnagyobb tüskét. (M. Lustig, D. Donoho, J. Santos and J. Pauly, *Compressed Sensing MRI*, *Signal Processing Magazine*, March 2008. szívességéből)

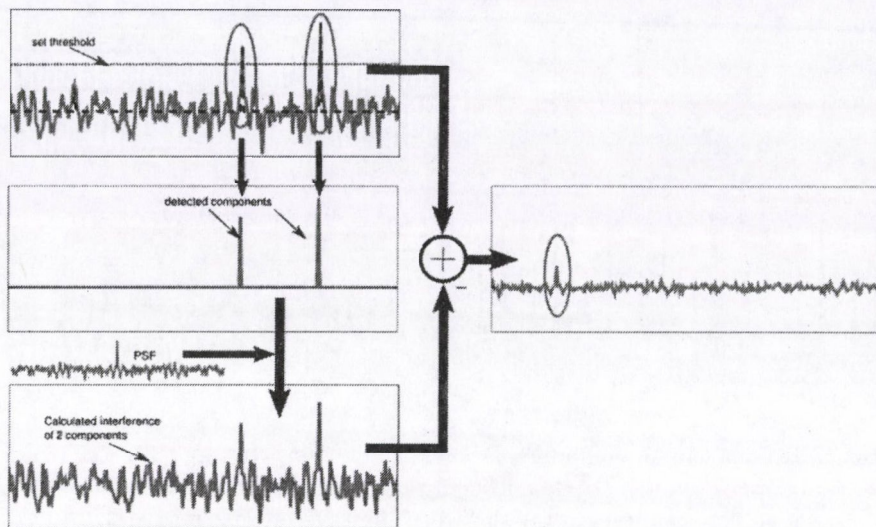
## 2. Az új bizonyítvány

Donoho egyik volt diákja, Emmanuel Candes, ugyanezzel a kételkedéssel találta magát szemben 2004-ben, amikor mágneses rezonancia vizsgálatban egy csapat radiológussal dolgozott együtt. „Fantomképes” próbufuttatásokon, azaz amikor nem egy igazi betegről készült képet futtatott, képes volt tökéletesen helyreállítani a képet alul-mintavételezett adatból. „Semmilyen különbség nem volt az eredeti és a rekonstruált kép között” - mondja Candes. „Tulajdonképpen bajba is kerültem, mert azt hitték, hogy simliskedtem.”

Ezen a ponton Candes sorsszerű dolgot tett: beszélt a 2006-os Fields-érem egyik kitüntetettjével, Terry Taoval. Úgy esett, hogy mindkét matematikus gyereke ugyanabba az óvodába járt. Miközben éppen a gyereküket adták le egyik nap, Candes mesélt Taonak a „túl jó, hogy igaz legyen” rekonstruálásokról. „Már elkezdtem keresni a magyarázatot, és némi haladást is elértem, de egy bizonyos ponton elakadtam” - mondta Candes.

„Terry matematikusként reagált” - folytatja Candes. „Azt mondta, olyan ellenpéldát fogok találni, ami megmutatja, hogy amire gondolok, az nem lehet igaz”. De furcsa dolog történt. Egyik ellenpéldáról sem látszott, hogy működne, és Tao kezdte figyelmesebben hallgatni Candes érvelését. „Egyszer csak rám nézett és





**3. ábra.** A 2. ábra viszonyai között a harmadik frekvencia tuskét iteratív küszöb eljárással lehet visszanyerni. Ha kezdettől tudjuk, hogy a jel 3-ritka (sparse), akkor a jelet tökéletesen vissza lehet nyerni annak ellenére, hogy 8-szoros az alulmintavétel. Röviden, ritkasság és véletlenszerű mintavétel lehetővé teszi a tökéletes (vagy majdnem tökéletes) rekonstrukciót. (M. Lustig, D. Donoho, J. Santos and J. Pauly, Compressed SensingMRI, Signal Processing Magazine, March 2008. szíveségéből)

azt mondta: Lehet, hogy igazad van”. Tao legendás gyorsaságával néhány napon belül átsegítette Candest az akadályon, és ketten elkezdtek felvázolni a tömörített érzékelés első igazán általános elméletét.

A Candes-Romberg-Tao szerkezetben egy  $x$  vektor ( $N$  valós szám sorozata) jellemez egy jelet vagy egy képet. Erről a vektorról feltesszük, hogy  $K$ -ritka (sparse), ami azt jelenti, hogy, valamilyen előírt bázisban, legfeljebb  $K$  nullától különböző együtthatót tartalmaz. ( $K$ -ról feltesszük, hogy sokkal kisebb  $N$ -nél). Például, ha a bázis tagjai  $\mathbb{R}^N$  standard koordináta vektorai, akkor  $x$  szó szerint, majdnem csupa nullából áll. Pontosan ez a helyzet a ritkás túskenyaláb feltevés esetén.

A ritkás túskenyaláb feltevés azonban nem követel meg adott bázist. Például a fényképek egyáltalán nem ritkák (sparse) a standard bázisban; sok nem nulla együtthatójuk van, nevezetesen a nem fekete pixelek. A JPEG tömörítés bizonyította be, hogy egy másik bázisban viszont majdnem mindig közelítőleg ritkák (sparse), és ez a waveletek bázisa. Ha  $\Psi$  jelöli a bázisvektorok  $N \times N$ -es mátrixát, akkor ebben a  $K$ -ritka (sparse) jel az lesz, amelyiket a  $\Psi x$  alakban lehet írni, ahol  $x$ -nek legfeljebb  $K$  nullától különböző együtthatója van.



Az  $x$  jelből vett  $y$  mintavétel  $x$  lineáris függvénye,  $y = \Phi x$ , a Candes-Romberg-Tao-szerkezet szerint. A mintában levő mérések számáról,  $M$ -ről feltesszük, hogy a jel méreténél kisebb,  $M \ll N$ . Így  $\Phi$  egy  $M \times N$ -es mátrix. Elemi lineáris algebrából tudjuk, hogy végtelen sok olyan  $x^*$  vektor van, amire  $y = \Phi x^*$ . De ha  $M \geq 2K$ , akkor  $y = \Phi x^*$  egyetlen más megoldása sem lesz ritka (sparse). Tehát, ha előre tudjuk, hogy  $x$  ritka (sparse), akkor az  $M$  számú mérésből elvileg pontosan rekonstruálni lehet.

Abból, hogy tudjuk, hogy csak egyetlen megoldás létezik, még nem következik, hogy képesek is vagyunk megtalálni. A probléma abban áll, hogy nem tudjuk előre, hogy  $x$  melyik  $K$  koordinátája nem nulla. A naiv megközelítés az, ha végigpróbáljuk az összes lehetőséget, amíg rálelünk a jóra, de ez reménytelenül lassú algoritmusnak bizonyul. Candes és Tao azonban egy olyan utat talált, ami nemcsak gyorsabban fut a számítógépen, de megmagyarázza azt is, hogy a véletlenszerű mintavétel miért működik sokkal jobban az egyenletes mintavételnél.

Ha képünk néhány ritkásan elhelyezkedő pontból vagy néhány éles vonalból áll, akkor a *legrosszabb* módszer az, ha az egyes pixelek befogásával veszünk mintát (a közönséges fényképezőgép pont így működik). A *legjobb* módszer az, ha a képet szélesen kiterített zajfüggvényekkel vetjük össze. A „20 kérdés” nevű játékkal<sup>4</sup> tudjuk ezt érzékeltetni. Ha 1-től  $N$ -ig kell egy számot kitalálni, a legrosszabb amit tehetünk, ha találgatjuk az egyes számokat (ez felel meg az egyes pixelek megmérésének). Átlagban ez  $N/2$  találgatást jelent. Ezzel szemben, ha olyan kérdéseket teszünk fel, hogy „a szám kisebb  $N/2$ -nél?”, azután „a szám kisebb  $N/4$  -nél?” és így tovább, akkor az elrejtett számot legfeljebb  $\log_2 N$  kérdéssel megtalálhatjuk. Ha  $N$  nagy szám, akkor ez hatalmas gyorsulás.

Figyeljük meg, hogy a „20 kérdés” stratégia adaptív: az előző válaszok fényében szabad változtatnunk kérdéseinken. Candesnek és Taonak nem adaptív eljárást kellett kifejlesztenie ahhoz, hogy a gyakorlatban is használható legyen, de úgy, hogy közben ugyanazt a garantált teljesítményt nyújtja, mint az előbb leírt adaptív stratégia. Más szóval, előre ki kellett találniuk, hogy mik lennének az  $x$ -ről legtöbb információt nyújtó kérdések. Az új elmélet egyik nagy meglepetése, hogy ezt meg is lehet tenni. Megközelítésükben az ötlet az  $\ell_1$  minimalizálás.

Egy vektor  $\ell_0$  normája egyszerűen a benne levő, nullától különböző bejegyzések száma, amit kicsit fesztelenül így lehet írni:

$$\| (x_1, x_2, \dots, x_n) \|_0 = \sum |x_j|^0.$$

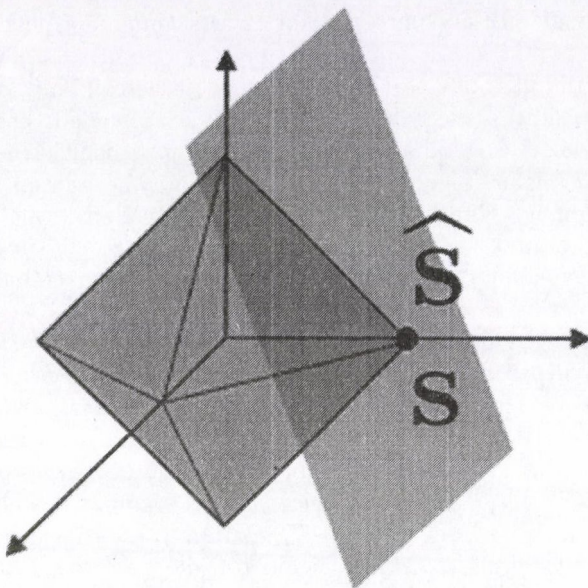
(Ebben a formulában, megállapodás szerint,  $0^0 = 0$ .) Az  $\ell_1$  normát úgy nyerjük, hogy a 0-akat 1-esekre cseréljük az előző egyenletben:

$$\| (x_1, x_2, \dots, x_n) \|_1 = \sum |x_j|.$$

Ezen a nyelven az  $y = \Phi x^*$  egyenlet egyetlen legkisebb  $\ell_0$  normájú megoldása éppen  $x$ . De Tao és Candes megmutatta, hogy sok esetben ez az  $x$  az egyetlen

<sup>4</sup>A barkochba játék egy amerikai, televíziós változata, en.wikipedia.org/wiki/Twenty\_Questions

legkisebb  $\ell_1$  normájú megoldás is. Ez a felismerés döntőnek bizonyult, mert az  $\ell_1$  minimalizálás lineáris programozási feladat, amit ismert, hatékony számítógépes algoritmusokkal meg lehet oldani. (Lásd a Smooth(ed) Moves című cikket a What's happening in Mathematical Sciences 6. kötetében)



**4. ábra.** Az  $S$  ritka (sparse) jel véletlenszerű mérése ezt a mérést produkáló lehetséges jelek (zöld) alterét generálja. A zöld altérben belül a legkisebb  $\ell_1$  normájú vektor,  $S^\wedge$ , általában  $S$ -sel egyenlő. (R. G. Baraniuk, Compressive Sensing [Lecture Notes], Signal Processing Magazine, July 2007. szívésségéből)

A 4. ábra illusztrálja, hogy miért gyakori az, hogy az  $\ell_1$ -et minimalizáló ugyanaz, mint az  $\ell_0$ -t minimalizáló. A 3 dimenziós térben az  $\ell_1$  norma szerinti egységvektorok egy oktaédert alkotnak. Mivel sok nulla koordinátája van, gondoljuk el, hogy a ritka (sparse)  $x$  vektor benne fekszik egy koordináta tengelyben, ezért az oktaéder egyik csúcsában végződik. Azon  $x^*$  vektorok halmaza, amelyekre  $y = \Phi x^*$  teljesül, egy, az  $x$  ponton átmenő sík. A legtöbb az  $x$  ponton átmenő sík az oktaédert *csak* ebben az egyetlen  $x$  pontban metszi, másképpen szólva,  $x$  a síkon az egyetlen minimális normával rendelkező pont. Tehát, ha egyszerűen a  $\Phi$  mérést véletlenszerűen tesszük meg, jó esélyünk van rá, hogy  $x$ -et egyértelműen rekonstruálni tudjuk.

Sajnos  $\Phi$  véletlenszerű kiválasztása nem mindig működik. Esetleg pechesek leszünk, és pont egy olyan  $x$ -en átmenő síkot választunk, ami az oktaéder belsejébe is belemetsz. Ha ez történik, akkor az  $\ell_1$  minimalizáló nem lesz ugyanaz, mint az  $\ell_0$  minimalizáló. Az algoritmus egy hibás  $x^*$  jelet fog eredményezni. De a 4. ábrán látható kép valamennyire félrevezető, mivel a képek vektorainak dimen-

ziója általában ezres vagy milliós nagyságrendű. A millió-dimenziós térben az oktaéder analógját keresztpolitópnek hívják; és a keresztpolitóp a millió-dimenziós térben nagyon, nagyon, nagyon hegyes. Egy a csúcson átmenő, de egyébként véletlenszerű sík *majdnem biztos*, hogy a keresztpolitóp belsejét elkerüli. A „nagy dimenziós geometria e csodájának” köszönhetően, ahogy ezt Candes nevezi, az  $\ell_1$  minimalizáló majdnem biztosan a korrekt jel lesz.

Összefoglalva, a tömörített érzékelés elmélete a következőket mondja:

- „Sok  $\Phi$   $M \times N$ -es mátrixra az  $y = \Phi x^*$  egyenlet egyetlen  $K$ -ritka (sparse) megoldását *pontosan* vissza lehet nyerni.”
- $N$ -nek  $K$ -nál sokkal nagyobbnak kell lennie, azonban  $M$ -nek, a mérések számának csak egy kicsit kell  $K$ -nál nagyobbnak lennie. Pontosabban,  $M$ -nek durván  $K \log(N/K)$ -nak kell lennie. Figyeljük meg, hogy ez  $N$ -től logaritmikusán függ, így a „20 kérdés”-nél véghezvitt gyorsulást most is elértük.
- „A  $K$ -ritka (sparse) megoldást  $\ell_1$  minimalizálással találjuk meg, amiről a  $\Phi$  mérési mátrixra vonatkozó bizonyos feltételek teljesülése esetén belátható, hogy az  $\ell_0$  minimalizálással ekvivalens.”
- A  $\Phi$  véletlen mátrixok majdnem mindig kielégítik ezeket a feltételeket.

Az egész történet lényegében változatlanul megmarad, ha a jel nem a standard koordináta vektorok bázisára nézve, hanem egy másik bázisra, mondjuk a waveletekére nézve ritka (sparse). Az egyetlen dolog, ami változtatásra szorul az, hogy az  $y = \Phi x^*$  megszorítást az  $y = \Phi \Psi x^*$  megszorítással helyettesítjük. Ebben az összefüggésben a  $\Phi$  mérési mátrix véletlenszerűsége kettős célt szolgál. Először, azt a legegyszerűbb feltételhalmazt biztosítja, amikor az  $\ell_1$  minimalizálás bizonyíthatóan ekvivalens az  $\ell_0$  minimalizálással. Másodszor pedig, az előbbtől függetlenül biztosítja, hogy a mérési vektorok halmaza ( $\Phi$  sorai) annyira különböznek a kép bázisától ( $\Psi$  oszlopaitól), amennyire ez csak lehetséges. Ha a kép bázis tüskékből áll, akkor a mérések bázisának kiterjedt véletlenszerű zajból kellene állnia. Ha a kép bázis waveletekből áll, akkor a mérések bázisa „noiselet”-eknek hívható kiegészítő típusú jeltől kell állnia.

„Cikkünk valami tényleg váratlanra mutatott rá” - mondja Candes. „Arra nevezetesen, hogy rendkívül hatásos érzékelő mechanizmust ad a véletlenszerűség használata. Ez az első számú állítás. A második számú állítás pedig az, hogy mindez kiállja a szigorú elemzés próbáját.”

„Ami a matematikusoknak a cikkből tetszett, az a mód volt, ahogy az analízist és a valószínűségi számítást egybeolvasztotta. Területemen, az analízisben sokan úgy gondolták, hogy a valószínűségi számítás nem hasznos vagy nem méltó a figyelmükre. Intellektuális szinten változtatta meg a cikk gondolkodásukat, és arra készítette őket, hogy foglalkozzanak ezzel a területtel is.”





Richard Baraniuk. (saját szívességéből)

### 3. Legújabb fejlemények

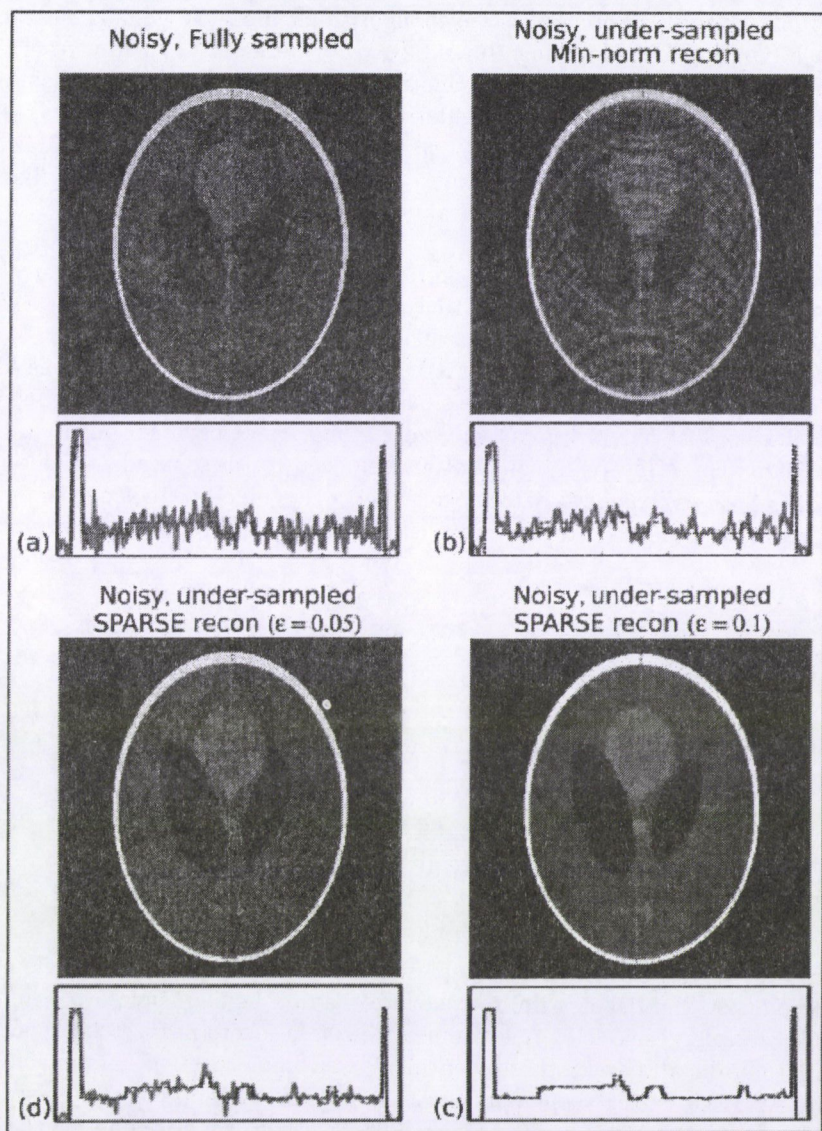
Tao és Candes preprintje 2004-ben jelent meg, mint ahogy Donoho hasonló eredményeket közlő cikke is. Mire Tao és Candes cikke 2006-ban ténylegesen megjelent, már több, mint 100-szor idézték. Azóta mind elméleti, mind gyakorlati téren sok előrelépés történt.

Az eredeti cikkben megválaszolatlanul hagyott kérdés az volt, hogy mennyire marad jó a tömörített érzékelés, ha a mérés valamilyen véletlenszerű hibát tartalmaz (valódi eszközöknél ez elkerülhetetlen probléma), vagy ha a ritka (sparse) jelről szóló feltételezés nem teljesen igaz. Fényképezésnél például szó szerint nem igaz. Élethűbb az a feltételezés, hogy a jel tömöríthető, ami azt jelenti, hogy a jel néhány együtthatója tartalmazza az információ túlnyomó részét. A többi együttható nem teljesen nulla, de kicsi. Ilyen körülmények között még az  $\ell_0$  minimalizálás se illik pontosan össze a jellel, így remény sincs rá, hogy az  $\ell_1$  minimalizálás teljesen korrekt legyen.

Candes, Romberg és Tao megmutatta 2005-ben, hogy a tömörített érzékelés jól működik még zajos mérések és tömöríthető, bár nem ritka (sparse) jelek esetében is. A helyreállított jel hibája nem lesz sokkal nagyobb a mérések hibájánál, és az  $\ell_1$  minimalizálás nem lesz sokkal nagyobb annál a büntetésnél, amit az  $\ell_0$  minimalizálás már ránc rött. Vagyis az  $\ell_1$  minimalizálás hűen adja vissza a legfontosabb információkat, a jel legnagyobb összetevőit. Az 5. ábra szimulált képhez adott zaj esetén ad példát a tömörített érzékelés teljesítményére.

A matematikusok olyan, a szokványos lineáris programozási eljárásoknál gyorsabb, új algoritmusokon dolgoznak, amelyek megoldják az  $\ell_1$  minimalizálás problémát.  $x$  legnagyobb  $K$  együtthatóját nem mind egyszerre találják meg, hanem iteratívan: először a legnagyobb nullától különböző együtthatót, azután a második



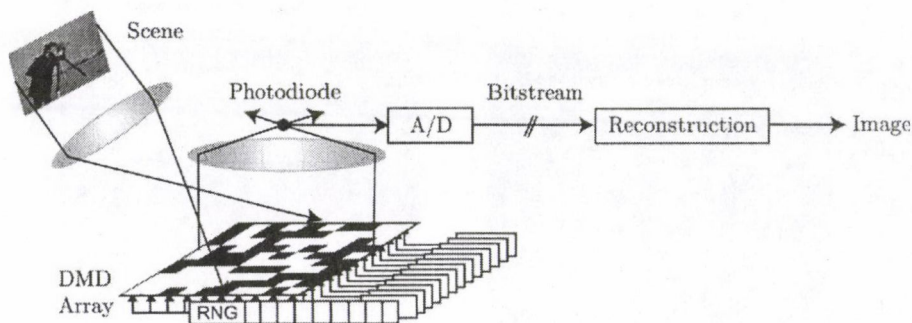


**5. ábra.** Tömörített érzékelés zajos adatokkal. (a) Kép hozzáadott zajjal. (b) Az alul-mintavételezett, majd a Shannon-Nyquist megközelítéssel helyreállított kép. (d) Ugyanaz a kép, véletlenszerűen alul-mintavételezve, majd egy "túlságosan optimista" zaj modellel helyreállítva. Habár nincsenek műleletek, a zaj egy részét félreértette és valós módosulásként vette az eljárás. (c) Ugyanaz a kép, egy toleránsabb zaj modellel rendelkező véletlenszerű mintából helyreállítva. Az eljárás elnyomta a zajt és nincsenek műleletek sem. (Michael Lustig szívességből)



legnagyobbat, és így tovább. Az első ilyen algoritmus, amit ortogonális illeszkedési keresésnek (Orthogonal Matching Pursuit (OMP)) neveztek el, nem érte el az  $\ell_1$  minimalizálás által biztosított pontosságot. De mára már az OMP változatainak színes csokra létezik, mint például regularizált OMP (ROMP), vagy a szakaszonkénti, „stagewise” OMP (StOMP), amik sikeresen ötvözik az  $\ell_1$  minimalizálás pontosságát és az OMP gyorsaságát. Ezeknek az algoritmusoknak az az előnyük az  $\ell_1$  minimalizálás „nagy dimenziós csodájával” szemben, hogy intuitívabbak. A 3. ábra mutat erre példát.

Eközben több különböző terület kutatója puhatojja a tömörített érzékelés gyakorlati alkalmazásait. Baraniuk és Kelly 2006-ban épített egyetlen pixeles fényképezőgépe egy sereg baktérium méretű tükröt használ, hogy a bejövő fényből véletlenszerű mintát vegyen. (Lásd a 6. ábrát.) Mindegyik tükröt kétféle állás egyikébe lehet dönteni: vagy az egyetlen érzékelő felé tükrözi a fényt, vagy elfelé. Tehát az érzékelő által kapott fény sok pixel súlyozott átlaga, amit egyetlen pixelben gyűjtöttünk össze. Ha  $K \log(N/K)$  pillanatfelvételt készítettünk, minden alkalommal különböző, véletlenszerűen választott pixelekkkel, az egypixeles fényképezőgép képes volt felismerhető képet készíteni,  $N$  pixellel összemérhető felbontásban.



**6. ábra.** Az "egypixeles fényképezőgép" sematikus diagramja. Az érzékelő egyetlen fotódióda. A "DMD" egy mikro-tükrök rács, ami a bejövő fénycsóva egy részét visszatükrözi az érzékelő felé. A kép másik részét (a fekete négyzeteket) elfelé téríti. A fotódióda által végzett minden mérés sok pixel véletlen kombinációjából jön létre. Az "Egy is elég" képen 1600 véletlen mérés elegendő volt, hogy egy 4096 pixeles fényképezőgép által készített képpel összevethető képet csináljon. (Richard Baraniuk szívességéből)

Baraniuk és Kelly csapata most a „hiperszínképes fényképezőgépen” dolgozik, amely a kép minden egyes pontjában a teljes színeképet rekonstruálná. „Egy hagyományos digitális képnek vannak vörös, kék és zöld pixellei.” - mondja Baraniuk. „Ez nagyszerű arra, hogy olyan fényképet csináljunk, ami becsapja az emberi szemet, de ez nem fogja be a különböző anyagok által kiadott hullámhosszok lényegét. Igazából ezernyi színből álló spektrumot szeretnénk kapni pusztán három szín

helyett. Ez lehetővé tenné, hogy meg tudjuk különböztetni egy kocsi zöld festékét és egy bokor zöld levelét.” Mivel a milliónyi pixel mindegyike ezernyi színű lehet, adattömörítés komoly üggyé válik.

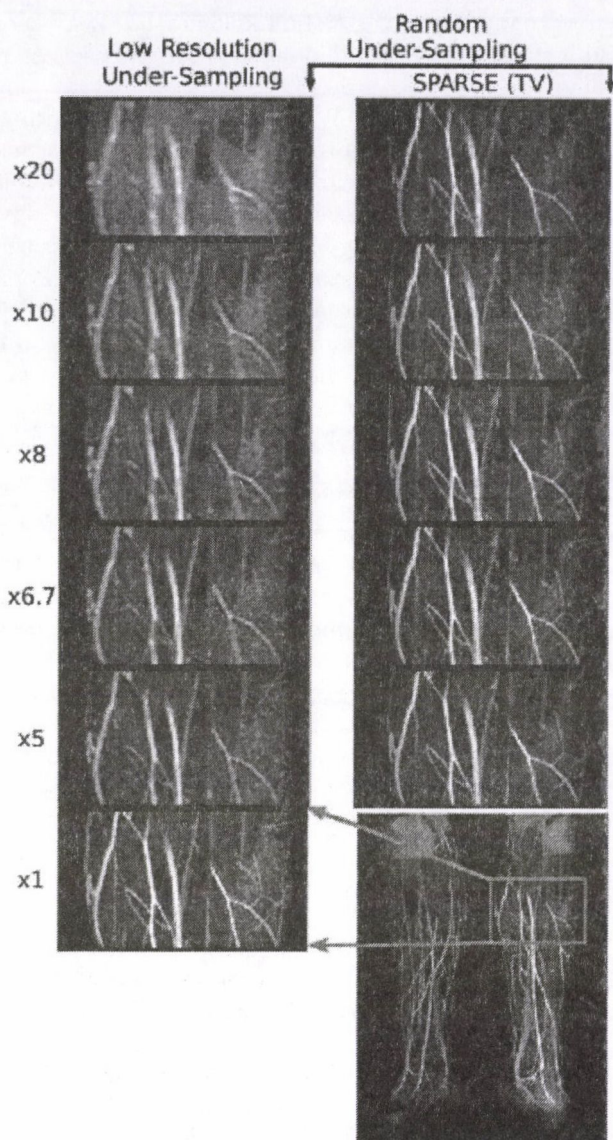
Baraniuk volt diákjával, Michael Wakinnal, aki most a Michigan Egyetemen van, szintén dolgozott a tárgyészlelési problémán. Sok alkalmazásnál nem egy tényleges fénykép elkészítése a fontos, hanem az, hogy gyorsan felismerjük, hogy mi van benne. Például, egy biztonsági rendszernek esetleg egy arcot vagy egy járművet kell azonosítania. Megtaníthatjuk, hogy felismerje egy Corolla és egy Porsche közti különbséget - példálózik Baraniuk. A számítógépben Corolla és Porsche képek vannak tárolva, de a fényképezőgép előtti jármű lehet, hogy úgy van elfordulva, hogy egyik képpel sem illik pontosan össze. Ebben az alkalmazásban a képvektornak más jellegű ritka (sparse) szerkezete van. Nem egy  $K$ -dimenziós síkon fekszik, hanem az  $N$ -dimenziós térben levő görbült  $K$ -dimenziós sokaságon. (Esetünkben  $K$  3-mal egyenlő.) Wakin megmutatta, hogy ebben a környezetben  $K \log N$  mérés még mindig elégséges.

A tömörített érzékelés néhány alkalmazása teljesen kívül esik a képfeldolgozás birodalmán. Az egyik ilyen példa az „analógról digitálisra konvertálás”, ami a drótnélküli, mobil kommunikáció alapvető jellegzetessége. Például a CDMA mobiltelefon szabvány bevesz egy hangüzenetet, ami 4096 hertzig terjedő hangfrekvenciákat tartalmaz, és szétteríti a rádióspektrumban, ami százezernyi hertzig terjed. A jel ritka (sparse), mivel csak annak a 4096 hertznek a belsejébe préselt információt tartalmaz. Tehát egy tömörített érzékelést végrehajtó vevőnek gyorsabban kell visszanyernie a jelet, mint egy Shannon tételén alapuló vevőnek.

Moore szabálya szerint a digitális fotográfiában kétévenként duplazzuk meg az egy áramkörti lapkán lévő jelfogók számát. De a digitális átalakítás világában, Baraniuk szerint „az egyenértékű érdemleges szám 6-8 évenként duplázódik meg”. Tehát ne várjunk évtizedeket hardver megoldásra, hanem oldjuk meg a problémát a tömörített érzékelésen alapuló szoftverrel.

Végül, a tömörített érzékelésnek orvosi alkalmazásai is vannak. Ez nem meglepő, hiszen egy, a mágneses rezonancia vizsgálatban talált probléma közvetlenül ihlette elméletének létrejöttét. Az MRI készülékek használata hagyományosan mozdatlan struktúrák képének rövid idő alatti létrehozására korlátozódott, és a beteget utasították, hogy tartsák vissza a lélegzetüket. De mostanában, a képet időben és térben ritka (sparse) jelként kezelő MRI készülékek elkezdtek leküzdeni ezeket a korlátokat, például egy dobogó szív képét állítják elő. A 7. ábra mutatja, hogy egy ritka (sparse) rekonstrukciós algoritmus mennyire képes éles képet nyújtani a beteg lábában lévő artériákról, pedig 20-szor kevesebb adatot használ, mint egy hagyományos angiogram.

Egy akadályt még le kell küzdenie a tömörített érzékelésnek. Ez azt jelenti, hogy hogyan fejlesszen ki gyakorlatban használható „következtelen” érzékelőket. A tömörített érzékelésben egyetlen mérés a bejövő tömöríthető jel, és a véletlenszerű, zajos teszt jel skaláris szorzata. Baraniuk egypixeles fényképezőgépe úgy hajtja végre a skaláris szorzást, hogy a fénycsóva egy részét a tükrök az érzékelő felé, más részét elfelé továbbítják. Ha a következtelen méréseket lehetővé tevő



**7. ábra.** Egy angiogram. Felülről lefelé, az angiogramot fokozatosan egyre nagyobb tényezőkkel fokozatosan alul-mintavételezzük. A Shannon-Nyquist mintavételezési stratégiát használva, a kép minősége úgy csökken, ahogy az alul-mintavételezés nő. A tömörített érzékelést használva, a kép még 20-szoros alul-mintavételezés esetén is nagyon éles körvonalú marad. Az itt és az 5. ábrában használt megközelítés nem  $\ell_1$  minimalizálás, hanem a térbeli gradiens  $\ell_1$  minimalizálása. (Michael Lustig szívességéből)



hardver drágább, mint a felváltani kívánt érzékelők sokasága, akkor a tömörített érzékelés melletti gazdasági érvek elenyésznek valós alkalmazásokban.

Miután annyi kérdés és annyi lehetőség van, pillanatnyilag lehetetlen megmondani, hogy melyik lesz a tömörített érzékelés legsikeresebb alkalmazása. Azonban egy dolog világos: a mérnökök végre kilépnek a Shannon tételét jelentő dobozból.



## SAJTÓKÖZLEMÉNY

### A Rényi könyvtár az élethosszig tartó tanulásért

Az olvasói szolgálat korszerűsítése valamint a folyamatban lévő, illetve tervezett kutatások elősegítése érdekében hazai könyvtáraink nagyszabású informatikai fejlesztésekbe kezdtek. A saját erőből történő korábbi bővítésen túl pályázatok segítségével törekedtek az egyes szakterületek speciális igényeinek megfelelő programok megvalósítására. Ilyen volt az európai uniós TÁMOP-3.2.4-09/1/KMR-2010-0008 jelű kiírása. A feladat teljesítése révén az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetében lévő elektronikus adatbázist húszezer könyv valamint hétszáz folyóirat bibliográfiai leírásával tudtuk bővíteni. Az általában szokásos adatfelvételen túl megadtuk az illető tétel más adatbázisban (pl. Library of Congress) szereplő leírását, könyvek esetében korábbi kiadások helyét, idejét, a művekben szereplő életrajzi adatok, fényképek, facsimilék fellelhetőségét. A hatékony tájékozódást részletesebb, magyar és angol nyelvű kulcsszavak beiktatása segíti elő. Ilyen módon az egyetemi szakdolgozatot készítő vagy tudományos kutatómunkát végző személyek, meg a nem formális és informális képzésben résztvevők gyorsabban, eredményesebben kaphatják meg a keresőprogramok révén a számukra fontos tényeket vagy létesíthetnek jó kapcsolatokat más adatbázisok irányába. A Könyvtárból elérhető adatbázistartalmakhoz a megújult, kétnyelvű honlapunkon olvasható e-forráslokátorból illetve a könyvtári katalógusból [http://www.renyi.hu/konyvtar/main\\_hu.html](http://www.renyi.hu/konyvtar/main_hu.html) címen juthatunk el. A fentebb említett támogatás segítségével létrejöhett a <http://matek.ek.szte.hu/matek/opac> című Matematikai Egyesített Katalógus (MatEK), amely egybefoglalja és ezáltal egységesen kutathatóvá teszi négy hazai egyetem, az Akadémia és két kutatóintézet matematikai gyűjteményét. Ezek: a Budapesti Műegyetem Könyvtára (BME OMIKK), a Debreceni Egyetemi és Nemzeti Könyvtár, az Eötvös Loránd Tudományegyetem (ELTE) Egyetemi Könyvtári Szolgálat, Szegedi Tudományegyetem (SZTE) Klebelsberg Egyetemi Könyvtár, a Magyar Tudományos Akadémia Könyvtára, az MTA SZTAKI Könyvtár és végül az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetének Könyvtára.

A korszerű, gyors adatközlés és információcsere érdekében ezeket a könyvtárakat modern reprográfiai és dokumentumtovábbító rendszerek szolgálják ki. Az utóbbi időben hatékony állományvédelmi rendszereket állítunk munkába az értékes gyűjtemények megőrzésére.



Az Alkalmazott Matematikai Lapok megjelenését támogatja  
a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

A kiadásért felelős a BJMT főtítkára  
Szedte és tördelte Éliás Mariann

Nyomta a Nagy és Társa Kft., Budapest

Budapest, 2011  
Megjelent 18 (A/5) ív terjedelemben  
250 példányban  
HU ISSN 0133-3399

2002-07-09

## ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A közlésre szánt dolgozatokat e-mailen az `aml@math.elte.hu` címre kérjük elküldeni az ábrákat tartalmazó fájlokkal együtt. Előnyben részesülnek a  $\text{\LaTeX}$ -ben elkészített dolgozatok.

**A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni:**

**Fejléc:** A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét és a szerző teljes nevét.

**Kivonat:** A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni.

**Fejezetek:** A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani, és az egyes szakaszokat arab sorszámozással kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell megnevezni.

A dolgozatban előforduló képleteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folytatólagos arab sorszámozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni, csak azokat, amelyekre a szerző a dolgozatban hivatkozni kíván.

Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket szintén folytatólagos arab sorszámozással kell ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén ábraazonosító sorszámokkal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozatban belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az esetleges definíciókat és tételeket (segédtételeket és lemmákat) szakaszonként újrakezdődő, ponttal elválasztott, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki.

**Irodalomjegyzék:** A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számait szögletes zárójelben kell megadni, mint például [2] vagy [1, 7–13].

Az irodalmi hivatkozások formája a következő: Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve a társszerzők esetén az első szerző neve szerint alfabetikus sorrendben úgy, hogy a cirill betűs szerzők nevét a Mathematical Reviews átírási szabályai szerint latin betűsre kell átírni. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

[1] FARKAS, J.: *Über die Theorie der einfachen Ungleichungen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **124**, (1902) 1–27.

[2] ZOUTENDIJK, G.: *Methods of Feasible Directions*, Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York (1960), 120 o.

**Szerző adatai:** Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezéseképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (esetleg lakása) pontos címét, illetve e-mail címét.

**Idegen nyelvű kivonat:** Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol nyelvű összefoglalót.

A szerzők a dolgozatukról 20 darab ingyenes különlenyomatot kapnak. A dolgozatok után szerzői díjat az Alkalmazott Matematikai Lapok nem fizet.

## TARTALOMJEGYZÉK

<i>Mánfay Máté</i> , Poincaré-egyenlőtlenség kizárásos folyamatokra .....	1
<i>Pál László, Csendes Tibor</i> , Egy intervallum alapú globális optimalizálási módszer és alkalmazása szenzor lokalizálási feladatra .....	17
<i>Takács Szabolcs</i> , Eljárás jó minőségű véletlen egész vektorok generálására .....	41
<i>Kovács Gergely, Radványi Anna</i> , Költségelosztási modellek .....	59
<i>Móczár József, Márkus Ferenc</i> , Lie-szimmetriák egy közgazdasági alkalmazása .....	77
<i>Fordította: Réti Zoltán</i> , Tömörített érzékelésnél minden egyes képpont számít .....	95
<i>Sajtóközlemény</i> , .....	113

## INDEX

<i>Máté Mánfay</i> , Poincaré inequality for interactive particle systems .....	1
<i>László Pál, Tibor Csendes</i> , An interval based global optimization method and its application to a sensor network localization problem .....	17
<i>Szabolcs Takács</i> , A procedure for generating high quality pseudo-random integer vectors ..	41
<i>Gergely Kovács, Anna Radványi</i> , Cost-sharing models .....	59
<i>József Móczár, Ferenc Márkus</i> , An economic application of the Lie symmetries .....	77
<i>Translated by Zoltán Réti</i> , Compressed Sensing Makes Every Pixel Count, What's Happening in the Mathematical Science .....	95
<i>Press release</i> , .....	113